BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Rochambeau

EXERCICE 1

Question 1. Réponse C
Question 2. Réponse B
Question 3. Réponse C

Explications.

Question 1. On note O l'événement « le bulletin est marqué oui », N l'événement « le bulletin est marqué non » et B l'événement « le bulletin est blanc ».
On note X le gain algébrique du joueur (mise comprise). X prend trois valeurs : 30 centimes d'euro, -30 centimes d'euro et -10 centimes d'euro. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

$$p(X = 30) = \frac{4}{10}, \quad p(X = -10) = \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad p(X = -30) = \frac{3}{10}.$$

L'espérance de la variable aléatoire X est donc

$$E(X) = 30 \times \frac{4}{10} - 10 \times \frac{3}{10} - 30 \times \frac{3}{10} = \frac{120 - 30 - 90}{10} = 0.$$

Le jeu est donc équitable.

Question 2. Notons Y le nombre de bulletins marqués « oui » tirés. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
• 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues : « le bulletin est marqué oui » avec une probabilité $p = 0,4$ (d'après 2.) ou « le bulletin n'est pas marqué oui » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,4$.
La probabilité demandée est $p(Y \geq 1)$. Or,

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0,6)^4 = 1 - (\frac{3}{5})^4 = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}.$$

Question 3. Le nombre de cas possibles est le nombre de tirages simultanés de 2 bulletins parmi 10.
Il y a donc $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ tirages possibles.
Trouvons la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire de l'événement « le joueur tire deux bulletins identiques ».
Il y a trois types disjoints de cas favorables :
•tirages de deux bulletins marqués oui au nombre de $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$;
•tirages de deux bulletins marqués non au nombre de $\binom{3}{2} = 3$;
•tirages de deux bulletins blancs au nombre de $\binom{3}{2} = 3$.
La probabilité de l'événement « le joueur tire deux bulletins identiques » est donc $\frac{6 + 3 + 3}{45} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$.
La probabilité cherchée est alors

$$1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}.$$

EXERCICE 2

1. a) σ est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. On note M' l'image de M par σ et z' l'affixe de M'. On sait que l'écriture complexe de la similitude de centre d'affixe ω, de rapport k et d'angle θ est

$$z' = \omega + ke^{i\theta}(z - \omega).$$

Ici,

$$\begin{aligned} z' &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}(z-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-2) + 2 = \frac{1+i}{2}(z-2) + 2 = \frac{1+i}{2}z - 1 - i + 2 \\ &= \frac{1+i}{2}z + 1 - i. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z,\ z' = \frac{1+i}{2}z + 1 - i.}$$

c) Soit z un nombre complexe.

$$z - z' = z - \frac{1+i}{2}z - 1 + i = \frac{1-i}{2}z - 1 + i,$$

et

$$i(2 - z') = i\left(-\frac{1+i}{2}z - 1 + i + 2\right) = i\left(-\frac{1+i}{2}z + 1 + i\right) = -\frac{i(1+i)}{2}z + i(1+i) = \frac{1-i}{2}z - 1 + i.$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z,\ z - z' = i(2 - z').}$$

2. a) Question de cours

Soient P et Q deux points du plan.

- Si $P \neq A$, alors $r(P) \neq A$ et

$$\begin{aligned} Q = r(P) &\Leftrightarrow AQ = AP \text{ et } (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \frac{AQ}{AP} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \\ &\Leftrightarrow \frac{|q-a|}{|p-a|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{q-a}{p-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \left|\frac{q-a}{p-a}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{q-a}{p-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \\ &\Leftrightarrow \frac{q-a}{p-a} = i \Leftrightarrow q - a = i(p - a). \end{aligned}$$

- Si $P = A$ alors $Q = A$ et l'égalité reste vraie.

$$\boxed{\text{pour tout point } P \text{ du plan, } q - a = i(p - a).}$$

b) Soit M un point du plan. D'après les questions 1.c) et 2.a), M est l'image de Ω par la rotation de centre M' et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. En particulier, si M est distinct de Ω

$$\boxed{\text{le triangle } \Omega M'M \text{ est isocèle (de sommet } M'\text{) rectangle et direct.}}$$

3. a) Pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} - 2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}(a_n - 2)$. Donc la suite $(a_n - 2)$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}$ et de premier terme $a_0 - 2$ c'est-à-dire i. On sait alors que pour tout entier naturel n, on a $a_n - 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}\right)^n (a_0 - 2)$ ou encore

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}\right)^n .i + 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{in\pi/4}e^{i\pi/2} + 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i(n+2)\pi/4} + 2.$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i(n+2)\pi/4} + 2.}$$

b) En particulier,

$$a_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 e^{7i\pi/4} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) + 2 = \frac{1}{8}(1-i) + 2 = \frac{1}{8}(17-i).$$

$$\boxed{A_5(\frac{17}{8}, -\frac{1}{8}).}$$

4. Soit n un entier naturel. Notons $\mathscr{D}$ le disque de centre Ω et de rayon $0,01$.

$$\begin{aligned}
A_n \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow \Omega A_n \leq 0,01 \Leftrightarrow |a_n - 2| \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i(n+2)\pi/4}\right| \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \leq \frac{1}{100} \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 100 \Leftrightarrow 2^n \geq 10000 \text{ (en élevant les deux membres positifs de l'inégalité au carré)} \\
&\Leftrightarrow n \geq 14 \text{ (pas besoin de machine).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{n_0 = 14.}$$

EXERCICE 3

1. • g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour x réel strictement positif,

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}.$$

g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{2}{x} = -\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

• g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$.
g est continue et strictement croissante sur $[2,3;2,4]$. De plus $g(2,3) = -0,03...$ et $g(2,4) = 0,04....$ Donc 0 appartient à l'intervalle $[g(2,3), g(2,4)]$. On en déduit que g s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[2,3;2,4]$ en un réel noté x_0.
Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ s'annule une fois et une seule sur }]0,+\infty[\text{ en un réel noté } x_0.\\ \text{De plus, } 2,3 < x_0 < 2,4.\end{array}}$$

2. **a)** L'égalité $g(x_0) = 0$ s'écrit encore $\ln(x_0) = \frac{2}{x_0}$. Par suite,

$$f(x_0) = \frac{5\ln x_0}{x_0} = \frac{5\frac{2}{x_0}}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}.$$

$$\boxed{f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}.}$$

b) Soit a un réel strictement supérieur à 1. f est continue sur $[1,a]$ et donc $\int_1^a f(t)\,dt$ existe. De plus ($\frac{1}{t}\ln t$ est du type $u'.u$ avec $u = \ln t$ et une primitive de $u'.u$ est $\frac{1}{2}u^2$)

$$\int_1^a f(t)\,dt = 5\int_1^a \frac{1}{t}.\ln t\,dt = 5\left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^a = \frac{5}{2}\ln^2 a.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } a \text{ strictement supérieur à } 1, \int_1^a f(t)\,dt = \frac{5}{2}\ln^2 a.}$$

3. L'abscisse du point P_0 est le réel x_0 défini en 1. Puisque f est positive sur $[1,x_0]$, l'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine $\mathscr{D}_1$ exprimée en unités d'aire est $\int_1^{x_0} f(t)\,dt$. D'après la question 2.b), on a

$$\mathscr{A}_1 = \frac{5}{2}\ln^2 x_0 = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{x_0}\right)^2 = \frac{10}{x_0^2}.$$

Mais d'autre part, en notant $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ exprimée en unités d'aire, on a d'après la question 2.a),

$$\mathscr{A}_2 = 1\times f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}.$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \frac{10}{x_0^2}.}$$

Ensuite, d'après la question 1, on a $2,3 < x_0 < 2,4$. On en déduit que $5,29 < x_0^2 < 5,76$ puis que $1,73... < \dfrac{10}{x_0^2} < 1,89...$ Finalement, on obtient un encadrement de $\mathscr{A}_1$ d'amplitude $0,2$:

$$\boxed{1,7 < \mathscr{A}_1 < 1,9.}$$

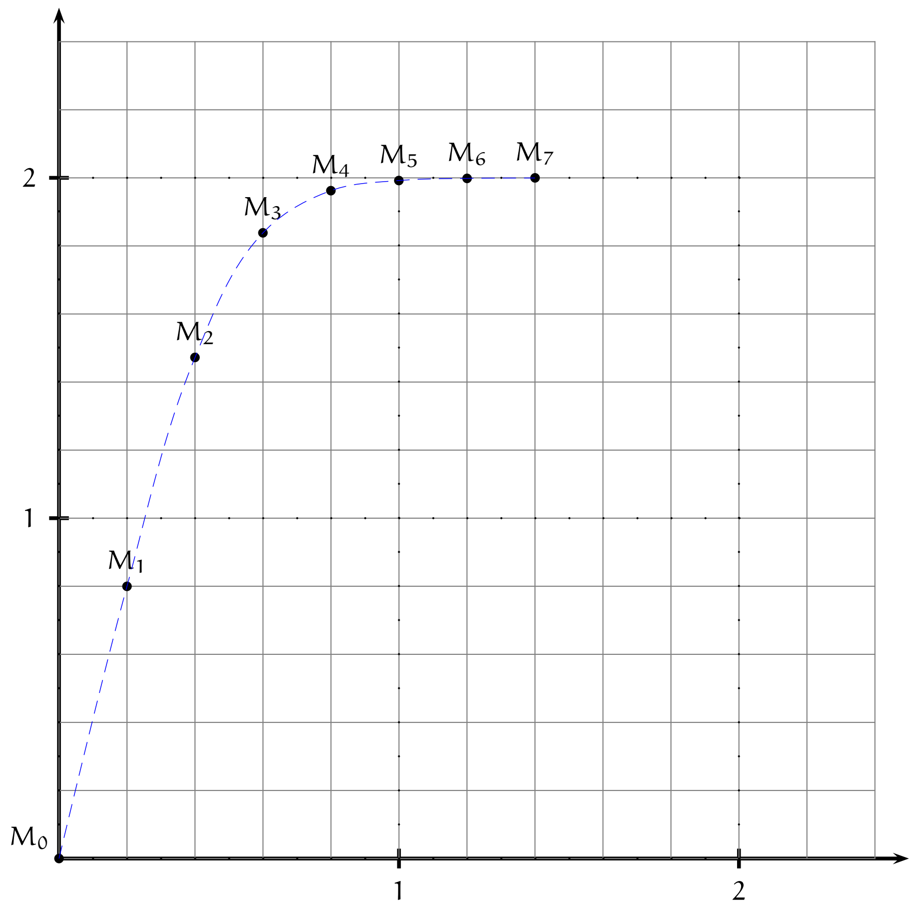
EXERCICE 4

Partie A : étude d'une suite

1. a) La machine fournit

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1	$1,2$	$1,4$
y_n	0	$0,8000$	$1,4720$	$1,8386$	$1,9625$	$1,9922$	$1,9984$	$1,9996$

b)



c) Il semblerait que la suite (y_n) soit strictement croissante et convergente (de limite 2 ?).

2. a) p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$p'(x) = -0,4x + 1 = -0,4(x - 2,5).$$

Mais alors, pour tout réel x de $[0,2]$, $p'(x) \geq 0$. p est donc croissante sur $[0,2]$. Par suite,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Rightarrow p(0) \leq p(x) \leq p(2) \Rightarrow 0,8 \leq p(x) \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq p(x) \leq 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si } x \in [0,2] \text{ alors } p(x) \in [0,2].}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $y_n \in [0, 2]$.

- $y_0 = 0$ et donc $y_0 \in [0, 2]$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que $y_n \in [0, 2]$. Alors d'après a), $p(y_n) \in [0, 2]$ et donc $y_{n+1} \in [0, 2]$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq y_n \leq 2.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$y_{n+1} - y_n = (-0,2y_n^2 + y_n + 0,8) - y_n = -0,2y_n^2 + 0,8 = -0,2(y_n^2 - 4) = -0,2(y_n + 2)(y_n - 2).$$

Puisque y_n est inférieur ou égal à 2, cette dernière expression est positive.
On a montré que pour tout entier naturel n, on a $y_{n+1} - y_n \geq 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante.}}$$

d) D'après c), la suite (y_n) est croissante et d'après b), la suite (y_n) est majorée par 2. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est convergente.}}$$

Partie B : étude d'une fonction

1. On a déjà $g(0) = 2 \times \dfrac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 2 \times \dfrac{1 - 1}{1 + 1} = 0$. D'autre part, g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$g'(x) = 2\frac{(4e^{4x})(e^{4x} + 1) - (e^{4x} - 1)(4e^{4x})}{(e^{4x} + 1)^2} = 8\frac{e^{4x}\left((e^{4x} + 1) - (e^{4x} - 1)\right)}{(e^{4x} + 1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

D'autre part,

$$4 - (g(x))^2 = 4 - 4\frac{(e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4\left(1 - \frac{(e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2}\right) = 4\frac{(e^{4x} + 1)^2 - (e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

On a montré que

$$\boxed{(1) : g(0) = 0 \text{ et } (2) : \text{pour tout réel positif } x,\ g'(x) = 4 - (g(x))^2.}$$

2. a) Pour tout réel positif x, $e^{4x} \neq 0$ et on peut donc écrire

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}(1 - e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = 2\frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-4x} tend vers 0 et donc $g(x)$ tend vers 2.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2.}$$

On en déduit encore que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = 2 \text{ est asymptote à } (C_g) \text{ en } +\infty.}$$

b) On a vu à la question 1 que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout réel positif x

$$g'(x) = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

g' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

3. Notons (T) la tangente à (C_g) en O (on rappelle que $g(0) = 0$). Puisque $g'(0) = 16\dfrac{1}{(1+1)^2} = 4$, une équation de (T) est $y = 4x$. Les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (T) vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 4x \end{array}\right. \text{ qui est équivalent à } \left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{les coordonnées du point d'intersection de } (\Delta) \text{ et de } (T) \text{ sont } (\frac{1}{2}, 2).}$$

4.