BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Pondichéry

Exercice 1

Affirmation 1.a	**Faux**
Affirmation 1.b	**Vrai**
Affirmation 1.c	**Faux**
Affirmation 2.a	**Vrai**
Affirmation 2.b	**Faux**
Affirmation 2.c	**Vrai**
Affirmation 3.a	**Faux**
Affirmation 3.b	**Vrai**
Affirmation 3.c	**Vrai**
Affirmation 3.d	**Faux**

Explications.

Affirmation 1.a On prend $a = 1$ et $b = 2$. $(e^a)^b = (e^1)^2 = e^2 = 7,38...$ et $e^{(a^b)} = e^{1^2} = e^1 = e = 2,71....$ Dans ce cas, $(e^a)^b \neq e^{(a^b)}$ et il est donc faux de dire que le résultat est vrai pour tous réels a et b.

Affirmation 1.b C'est un résultat de cours.

Affirmation 1.c Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 est

$$y = e + e(x - 1) \quad \text{ou encore} \quad y = ex.$$

$y = x + 1$ est une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Affirmation 2.a C'est un résultat de cours.

Affirmation 2.b La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue en 0, mais cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Affirmation 2.c C'est un résultat de cours.

Affirmation 3.a $(+\infty) + (-\infty)$ est une forme indéterminée. Par exemple, si on prend $u_n = n$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = 0$ et $u_n + v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais si on prend $u_n = n + 1$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = 1$ et $u_n + v_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ ou si on prend $u_n = n + \sqrt{n}$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = \sqrt{n}$ et $u_n + v_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou si on prend $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = (-1)^n$ et $u_n + v_n$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Affirmation 3.b Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Si $\ell > 0$, la suite $(u_n \times v_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et si $\ell < 0$, la suite $(u_n \times v_n)$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Dans chacun des deux cas, la suite $(u_n \times v_n)$ n'a pas de limite réelle quand n tend vers $+\infty$. Donc dans tous les cas, la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.

Affirmation 3.c La phrase « (v_n) est positive » permet à la suite (v_n) de s'annuler, de sorte que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ n'est pas définie et en particulier ne converge pas. Même si on remplace la phrase « (v_n) est positive » par la phrase « (v_n) est strictement positive », la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de la limite de la suite (u_n). Dans tous les cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.

Affirmation 3.d Pour n entier naturel donné, on prend $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Mais $\dfrac{u_n}{v_n} = n+1$ et la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Il fallait penser aux formes $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\ell}{0}$, $\ell \neq 0$, qui fournissaient des contre-exemples.

Exercice 2

1. Si a et b sont deux complexes tels que $a \neq 0$, $z' = az + b$ est l'expression complexe d'une similitude directe. f est donc une similitude directe.

Le rapport de f est le module de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Or

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{1}{2}.\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

Une mesure de l'angle de f est un argument de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Or

$$\frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}.$$

Donc

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} \text{ (modulo } 2\pi).}$$

Puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \neq 1$, f a bien un centre Ω. Ω est le point invariant par f.
Soient z un nombre complexe et M l'image de z dans le plan.

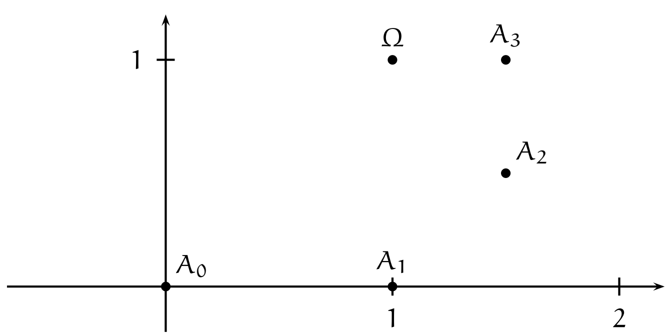
$$f(M) = M \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+i)z + 1 = z \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-1+i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-2}{-1+i} \Leftrightarrow z = \frac{-2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \Leftrightarrow z = 1+i.$$

Donc

$$\boxed{\Omega(1,1).}$$

2. a) $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 0 + 1 = 1$, puis $z_2 = \frac{1+i}{2} \times 1 + 1 = \frac{3+i}{2}$, puis $z_3 = \frac{1+i}{2} \times \frac{3+i}{2} + 1 = \frac{2+4i}{4} + 1 = \frac{3+2i}{2}$.

$$\boxed{z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = \frac{3+i}{2} \text{ et } z_3 = \frac{3+2i}{2}.}$$



b) Soit n un entier naturel. Puisque Ω est invariant par f, on a

$$z_{n+1} - \omega = \left(\frac{1+i}{2}z_n + 1\right) - \left(\frac{1+i}{2}\omega + 1\right) = \frac{1+i}{2}(z_n - \omega).$$

En passant aux modules, on obtient

$$u_{n+1} = \Omega A_{n+1} = |z_{n+1} - \omega| = \left|\frac{1+i}{2}\right||z_n - \omega| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z_n - \omega| = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega A_n = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. De plus

$$u_0 = \Omega A_0 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.}$$

c) Soit n un entier naturel. On note $\mathscr{D}$ le disque de centre Ω et de rayon $0,1$.

$$\begin{aligned}
A_n \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow \Omega A_n \leq 0,1 \Leftrightarrow u_n \leq 0,1 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{1}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \geq 10\sqrt{2} \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2}\right)^n \geq \ln(10\sqrt{2}) \quad \text{(par croissance de ln sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(2^{1/2}\right) \geq \ln(10\sqrt{2}) \Leftrightarrow n\frac{\ln(2)}{2} \geq \ln(10\sqrt{2}) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{2\ln(10\sqrt{2})}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geq 7,6... \\
&\Leftrightarrow n \geq 8.
\end{aligned}$$

$$\boxed{n_0 = 8.}$$

3. a) On a

$$\frac{z_0 - z_1}{\omega - z_1} = \frac{0-1}{(1+i)-1} = -\frac{1}{i} = i = e^{i\pi/2} \text{ et donc } z_0 - z_1 = e^{i\pi/2}(\omega - z_1).$$

Par suite A_0 est l'image de Ω par la rotation de centre A_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle $\Omega A_1 A_0$ est isocèle (en A_1) rectangle direct.

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, le triangle $\Omega A_{n+1} A_n$ est isocèle rectangle direct.
• D'après ce qui précède, le résultat est vrai quand $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que le triangle $\Omega A_{n+1} A_n$ soit isocèle rectangle direct. On note que

$$\Omega A_{n+2} A_{n+1} = f(\Omega) f(A_{n+1}) f(A_n) = f(\Omega A_{n+1} A_n).$$

Ainsi, le triangle $\Omega A_{n+2} A_{n+1}$ est l'image du triangle $\Omega A_{n+1} A_n$ par une similitude directe. Par hypothèse de récurrence le triangle $\Omega A_{n+1} A_n$ est isocèle rectangle direct. On en déduit que le triangle $\Omega A_{n+2} A_{n+1}$ est isocèle rectangle direct.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ le triangle } \Omega A_{n+1} A_n \text{ est isocèle rectangle direct (en } A_{n+1}).}$$

b) Soit k un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$A_{k-1} A_k = \Omega A_k = u_k = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

On en déduit pour tout entier naturel non nul n que

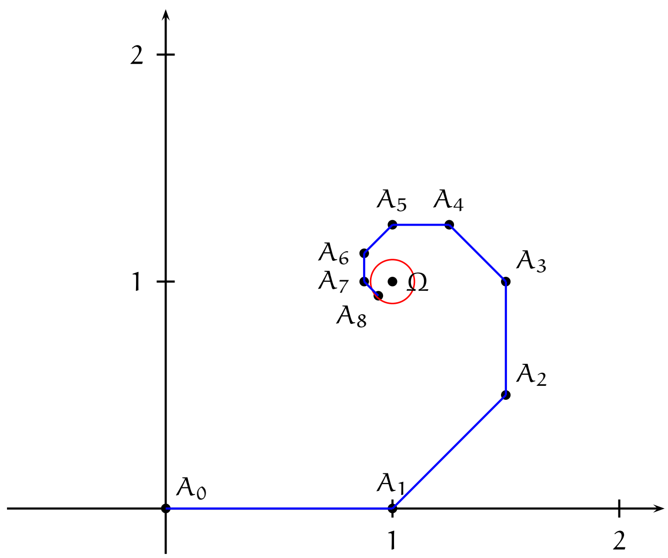
$$\begin{aligned}
\ell_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ ($\ell_0 = 0$).

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).}$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, on sait que $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (ℓ_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.}$$



Exercice 3

Partie A

1. Soit M un point de l'espace. On note (x, y, z) les coordonnées de M.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{n}$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{array}\right. .$$

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.}$$

2. a) Puisque Δ est la droite passant par I de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.
b) Les coordonnées de H sont $(x_I + ka, y_I + kb, z_I + kc)$.

$$H \in P \Leftrightarrow a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0 \Leftrightarrow k(a^2 + b^2 + c^2) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2} \ (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ car } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)).$$

$$\boxed{k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}.}$$

c) Mais alors

$$IH = \|\overrightarrow{IH}\| = |k|.\|\overrightarrow{n}\| = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$\boxed{IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Partie B

1. Puisque le plan Q est tangent à la sphère S, on sait que le rayon de S est la distance de Ω au plan Q. Or

$$d(\Omega, Q) = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 3 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{S \text{ est une sphère de rayon } 2\sqrt{3}.}$$

2. Δ est la droite passant par $\Omega(1, -1, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, -1, 1)$ (vecteur normal au plan Q). Un système d'équations paramétriques de Δ est donc $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$

3. Puisque Q est tangent à S, S et Q ont en commun un point et un seul qui est aussi le point d'intersection de Q et de Δ. Soient t un réel puis $M(1 + t, -1 - t, 3 + t)$ un point quelconque de Δ.

$$M \in Q \Leftrightarrow (1 + t) - (-1 - t) + (3 + t) - 11 = 0 \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Le point d'intersection de la sphère S et du plan Q est donc le point de coordonnées $(3, -3, 5)$.

Exercice 4

Partie A

1. Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Alors la fonction $g=\ln(f)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, on a $g'(t)=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$. Mais alors

$$\begin{aligned}
\text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln(f(t))\right] &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ \frac{f'(t)}{f(t)}=-\frac{1}{20}\left[3-\ln(f(t))\right]\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ g'(t)=-\frac{1}{20}\left[3-g(t)\right]\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0,+\infty[,\ g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}.
\end{aligned}$$

2. Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions de la forme

$$t\mapsto C.e^{at}-\frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Ici, $a=\dfrac{1}{20}$ et $b=-\dfrac{3}{20}$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les solutions sur } [0,+\infty[\text{ de l'équation (H) sont les fonctions } g \text{ définies sur } [0,+\infty[\text{ par :}\\ \text{pour tout réel positif } t,\ g(t)=3+Ce^{t/20} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}\end{array}}$$

3. Mais alors, d'après 1., il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0,+\infty[$,

$$f(t)=e^{g(t)}=\exp\left(3+C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

4. **a.** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{20}=+\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\exp\left(\frac{t}{20}\right)=+\infty$, puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)=-\infty$. Comme $\displaystyle\lim_{X\to-\infty}\exp(X)=0$, on a donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)=0$.

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}f(t)=0.}$$

b. f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif t, on a

$$f'(t)=\frac{1}{20}\times(-3)\exp\left(\frac{t}{20}\right)\times\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)=-\frac{3}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc, sur $[0,+\infty[$, f' est strictement négative sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

c. Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} f(t) < 0,02 &\Leftrightarrow \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < \frac{1}{50} \\ &\Leftrightarrow 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(\frac{1}{50}) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow 3.\exp\left(\frac{t}{20}\right) > 3 + \ln(50) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{t}{20}\right) > 1 + \frac{\ln(50)}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow t > 20\ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right) = 16,6\ldots \end{aligned}$$

Puisque $0,02$ millier d'individus $= 20$ individus, le réel ci-dessus est le nombre d'années cherché. On veut un nombre entier d'années à partir duquel la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus. Donc

$$\boxed{\text{au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.}}$$

Partie B

1. L'énoncé donne directement $p(M) = p(\overline{M}) = 0,5$, puis $p_M(T) = 0,99$ et enfin $p_{\overline{M}}(T) = 0,001$.

2. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,5 \times 0,99 + 0,5 \times 0,001 = 0,5 \times 0,991 = 0,4955. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 0,4955.}$$

3. $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \dfrac{0,5 \times 0,99}{0,4955} = 0,998\ldots$. Comme $p_T(M) < 0,999$,

$$\boxed{\text{le test n'est pas fiable.}}$$

