BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A (2 ; 1 ; 3), B (-3 ; -1 ; 7) et C (3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de (A ; -2), (B ; -1) et (C ; 2).

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 des points M de l'espace tels que $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 des points M de l'espace tels que $\| - 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})\| = \sqrt{29}$.
En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

e) Le point S(-8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = -2\mathrm{i}\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.

2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

On pose $g = f \circ h$.

a) Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) On désigne par M" l'image du point M d'affixe z par la transformation g.
Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -\mathrm{i}\overline{z} + 2 + 2\mathrm{i}$ où z'' est l'affixe de M''.

c) Montrer qu'il existe sur l'axe $(\mathrm{O}; \vec{v})$ un unique point invariant par g ; on le note L.
Reconnaître alors la transformation g.

d) En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.

3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ soient parrallèles.

EXERCICE 3 (7 points)

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.
Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en annexe, page 6.

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose I$=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\ ;1\ ]$.
On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (3 points)

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à
$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-2} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0,2}$.

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Annexe

EXERCICE 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur