BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Liban

EXERCICE 1

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-5, -2, 4)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Les trois points A, B et C n'étant pas alignés, ils déterminent un et un seul plan. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\overrightarrow{u}$ dont les coordonnées sont $(2, -3, 1)$. Puisque

$$2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = -10 + 6 + 4 = 0 \text{ et que } 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, la droite (d) est orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (AC) et donc

$$\boxed{\text{la droite } (d) \text{ est orthogonale au plan } (ABC).}$$

b) Le plan (ABC) est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ passant par A.
Soit M un point de l'espace. On note (x, y, z) ses coordonnées.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) - 3(y-1) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 4 = 0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } 2x - 3y + z - 4 = 0.}$$

3. a) Puisque la droite (d) est orthogonale au plan (ABC), elle est sécante à ce plan en un unique point que l'on note H.
Notons H' le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$. On a alors

$$x_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2x_A - x_B + 2x_C) = -(-4 + 3 + 6) = -5$$

et de même

$$y_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2y_A - y_B + 2y_C) = -(-2+1+4) = -3 \text{ et } z_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2z_A - z_B + 2z_C) = -(-6-7+8) = 5.$$

Les coordonnées du point H' sont donc $(-5, -3, 5)$.

- Puisque $2 \times (-5) - 3 \times (-3) + 5 - 4 = -10 + 9 + 5 - 4 = 0$, le point H' appartient au plan (ABC).
- Puisque $\left\{\begin{array}{l} x_{H'} = -5 = -7 + 2 \times 1 \\ y_{H'} = -3 = -3 \times 1 \\ z_{H'} = 5 = 4 + 1 \end{array}\right.$, le point H' appartient à la droite (d).

Finalement, le point H' est la point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (d). Donc $H' = H$.

$$\boxed{H \text{ est le barycentre de } (A; -2), (B; -1) \text{ et } (C; 2).}$$

b) Pour tout point M de l'espace, on a

$$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}.$$

Donc

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CB}=0.$$

$$\boxed{\Gamma_1 \text{ est le plan de vecteur normal } \overrightarrow{CB} \text{ passant par } H.}$$

c) Pour tout point M de l'espace

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}\Leftrightarrow\|\overrightarrow{HM}\|=\sqrt{29}\Leftrightarrow HM=\sqrt{29}.$$

$$\boxed{\Gamma_2 \text{ est la sphère de centre } H \text{ et de rayon } \sqrt{29}.}$$

d) L'intersection de Γ_1 et de Γ_2 est l'intersection de la sphère de centre H et de rayon $\sqrt{29}$ avec un plan passant par H. Il s'agit d'un cercle de centre H et de même rayon que la sphère.

$$\boxed{\Gamma_1\cap\Gamma_2 \text{ est le cercle de centre } H \text{ et de rayon } \sqrt{29} \text{ du plan } \Gamma_1.}$$

e) Le vecteur $\overrightarrow{HS}$ a pour coordonnées $(-3,4,-2)$. Donc $HS=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$.

Le point S appartient à la sphère Γ_2.

Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $(-6,-3,3)$. Donc $\overrightarrow{HS}.\overrightarrow{CB}=(-3)\times(-6)+4\times(-3)+(-2)\times 3=18-12-6=0$.

Le point S appartient au plan Γ_1.

Finalement,

$$\boxed{\text{Le point } S \text{ appartient à l'intersection de } \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2.}$$

EXERCICE 2

Partie A

1. Soient a et b deux complexes puis s la similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$.

$$s(O) = B \Leftrightarrow a \times 0 + b = z_B \Leftrightarrow b = 6,$$

et

$$s(A) = O \Leftrightarrow a(3i) + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{-3i} \Leftrightarrow a = 2i.$$

Il existe une similitude directe et une seule transformant A en O et O en B, à savoir la similitude directe d'expression complexe $z' = 2iz + 6$.

Cherchons le point invariant de s. Soit z un nombre complexe.

$$z' = z \Leftrightarrow z = 2iz + 6 \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 6 \Leftrightarrow z = \frac{6}{1 - 2i} \Leftrightarrow z = \frac{6(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \Leftrightarrow z = \frac{6}{5} + \frac{12}{5}i.$$

Le centre de la similitude s est le point Ω de coordonnées $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$.

Cherchons le rapport et l'angle de la similitude s. On sait que le rapport de s est le module de $2i$ c'est-à-dire 2 et qu'une mesure de l'angle de s est un argument de $2i$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$. Finalement,

$$\boxed{s \text{ est la similitude directe de centre } \Omega(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}), \text{ de rapport } 2 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

2. Soient a et b deux complexes puis f la similitude indirecte d'expression complexe $z' = a\overline{z} + b$.

$$f(O) = B \Leftrightarrow a \times 0 + b = z_B \Leftrightarrow b = 6,$$

et

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow a(-3i) + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{3i} \Leftrightarrow a = -2i.$$

Il existe une similitude indirecte et une seule f transformant A en O et O en B, à savoir la similitude indirecte d'expression complexe $z' = -2i\overline{z} + 6$.

Partie B

1. Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = z \Leftrightarrow z = -2i\overline{z} + 6 \Leftrightarrow x + iy = -2i(x - iy) + 6 \Leftrightarrow (x + 2y - 6) + i(2x + y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ x - 4x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{f \text{ admet un point invariant et un seul, le point } K(-2, 4).}$$

2. a) g est la composée d'une similitude de rapport 2 et d'une autre de rapport $\frac{1}{2}$. Puisque $2 \times \frac{1}{2} = 1$, on sait que g est une isométrie. De plus, $g(K) = f(h(K)) = f(K) = K$ et g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. On note z' l'affixe de $h(M)$ puis z'' l'affixe de $f(h(M))$. Alors

$$z' = \frac{1}{2}[z - (-2 + 4i)] + (-2 + 4i) = \frac{1}{2}z - 1 + 2i,$$

et donc

$$z'' = -2i\overline{z'} + 6 = -2i\left(\overline{\frac{1}{2}z - 1 + 2i}\right) + 6 = -i\overline{z} + 2i - 4 + 6 = -i\overline{z} + 2 + 2i.$$

c) Soit z un imaginaire pur. Posons $z = ix$ où x est un réel.

$$z'' = z \Leftrightarrow ix = -i(-ix) + 2 + 2i \Leftrightarrow (-x + 2) + i(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Donc g admet sur l'axe $(O, \overrightarrow{v})$ un point invariant et un seul le point d'affixe $2i$ ou encore le point $L(0, 2)$.
g est une isométrie indirecte ayant deux points distincts invariants, les points K et L. On sait alors que

g est la réflexion d'axe (KL).

d) Puisque le rapport de h n'est pas nul, on sait que h est une bijection du plan sur lui-même et que sa réciproque est l'homothétie h' de centre K et de rapport 2. Puisque $g = f \circ h$, on a encore $g \circ h' = f \circ h \circ h'$ et donc

$f = g \circ h'$ où g est la réflexion d'axe (KL) et h' est l'homothétie de centre K et de rapport 2.

3. Soit Δ une droite. L'image de Δ par l'homothétie h' est une droite Δ' parallèle à Δ et l'image par g de Δ' est parallèle à Δ' si et seulement si Δ' est parallèle ou perpendiculaire à (KL) ce qui équivaut à Δ est parallèle ou perpendiculaire à (KL). Donc,

$f(\Delta)$ est parallèle à Δ si et seulement si Δ est parallèle ou perpendiculaire à (KL).

EXERCICE 3

Partie A : étude d'une fonction

1. a) Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $x + 1 > 0$. Donc f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

Pour $x > 0$, on a $\ln(x+1) > 0$ et $\dfrac{x}{x+1} > 0$. Donc f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et f est ainsi strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe (C) au point O.

2. a) Pour tout réel x distinct de -1, on a

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + (b+c)}{x+1}.$$

On choisit alors a, b et c tels que $a = 1$, $a + b = 0$ et $b + c = 0$ c'est-à-dire $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. On obtient

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ distinct de } -1,\ \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.}$$

b) La fonction proposée est continue sur $[0, 1]$. Donc I existe. De plus,

$$I = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln(2).$$

$$\boxed{I = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

3. La fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc l'aire cherchée vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Pour x appartenant à $[0, 1]$, posons

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = \ln(x+1).$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, on a

$$u'(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2}(\ln(2) - I) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(2) - (\ln(2) - \frac{1}{2})\right) \text{ (d'après 2. b))} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{4} \text{ u. a.}}$$

4. f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2) = 0,6...$ ce qui montre que $0,25 \in [f(0), f(1)]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$. On note α cette solution.

On demande à la calculatrice un tableau de valeurs avec un pas $h = 0,1$. On lit $f(0,5) = 0,202...$ et $f(0,6) = 0,282...$ Ainsi, $f(0,5) \leq f(\alpha) \leq f(0,6)$ et puisque f est croissante sur $[0,1]$, on en déduit $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$.
De même, avec un pas $h = 0,01$, on lit $f(0,56) = 0,24..$ et $f(0,57) = 0,25...$ Ainsi, $f(0,56) \leq f(\alpha) \leq f(0,57)$ et on obtient un encadrement de α à 10^{-2} près :

$$\boxed{0,56 \leq \alpha \leq 0,57.}$$

Partie B : étude d'une suite

1. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\ dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\ dx = \int_0^1 (x^{n+1} \ln(x+1) - x^n \ln(x+1))\ dx = \int_0^1 (x-1)x^n \ln(x+1)\ dx.$$

Or, pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x-1 \leq 0$, $x^n \geq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$. Donc pour tout réel x de $[0,1]$, $(x-1)x^n \ln(x+1) \leq 0$. On en déduit que $\int_0^1 (x-1)x^n \ln(x+1)\ dx \leq 0$ et donc que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est une suite décroissante.}}$$

D'autre part, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n \ln(x+1) \geq 0$. Mais alors, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

2. Soit n un entier naturel.
Soit x un réel de $[0,1]$. Alors $1 \leq x+1 \leq 2$ et puisque la fonction ln est croissante sur $[0,1]$, on a $\ln 1 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$. Donc

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2).$$

On multiplie les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on a montré que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2).$$

Par positivité et croissance de l'intégrale on a alors

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\ dx.$$

Mais, $\int_0^1 x^n \ln(2)\ dx = \ln(2) \int_0^1 x^n\ dx = \ln(2).\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{\ln(2)}{n+1}$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.}$$

Puisque $\dfrac{\ln(2)}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

EXERCICE 4

1. Calculons d'abord $p(X \leq t)$ et $p(X > t)$ pour λ réel et t réel positif donnés.

$$p(X \leq \lambda) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1),$$

et

$$p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t} \quad (2).$$

Par suite,

$$p(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln(0,3) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,3}{6}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,3)}{6} = 0,20 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

2. (L'énoncé est confus et il faut probablement le comprendre comme on a envie de le comprendre.)

Soit t un réel positif.

$$p(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,5) \Leftrightarrow -0,2t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,2}.$$

0n a $\frac{\ln(2)}{0,2} = 3,46...$ Or 46% d'une année durent $\frac{46}{100} \times 12 = 5,5...$ mois. L'instant t cherché est donc

$$\boxed{\text{3 ans et 5 mois à un mois près.}}$$

3. La probabilité cherchée est $p(X > 2)$ c'est-à-dire $e^{-2.0,2} = e^{-0,4}$ (d'après (2) et puisque $\lambda = 0,2$).

4. La probabilité cherchée est $p((X > 6)/(X > 2))$. D'après (2), on a

$$p((X > 6)/(X > 2)) = \frac{p((X > 6) \cap (X > 2))}{p(X > 2)} = \frac{p(X > 6)}{p(X > 2)} = \frac{e^{-0,2.6}}{e^{-0,2.2}} = e^{-0,2.4} = e^{-0,8}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } e^{-0,8} \text{ ou encore } 0,44 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

5. Notons Y le nombre de robots qui n'ont pas eu de panne au cours des deux premières années. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

• 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

• chaque expérience a deux issues : « le robot n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $p = e^{-0,4}$ (d'après 2.) ou « le robot est tombé en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $1 - p = 1 - e^{-0,4}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = e^{-0,4}$.

La probabilité demandée est $p(Y \geq 1)$ et on a

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} = 0,99 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

