

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

France métropolitaine

EXERCICE 1

- 1) Vrai
 2) Faux
 3) Vrai
 4) Faux
 5) Vrai

Explications.

1) Soit (P) le plan d'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$.

- $2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 4 + 8 - 12 = 0$. Donc $A \in (P)$.
- $2 \times 0 + 2 \times 4 - (-3) - 11 = 8 + 3 - 11 = 0$. Donc $B \in (P)$.
- $2 \times 3 + 2 \times 1 - (-3) - 11 = 6 + 2 + 3 - 11 = 0$. Donc $C \in (P)$.

D'autre part, \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(-2, 0, -4)$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(1, -3, -4)$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires (car les coordonnées de \overrightarrow{AC} ne sont pas proportionnelles aux coordonnées de \overrightarrow{AB}) et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit qu'il existe un et un seul plan les contenant : le plan (P).

2) $2 \times 3 + 2 \times 2 - (-1) - 11 = 6 + 4 + 1 - 11 = 0$. Donc le point E appartient au plan (ABC).

Un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur \vec{n} de coordonnées $(2, 2, -1)$. Le vecteur \overrightarrow{DE} a pour coordonnées $(2, 2, 1)$ et il est clair que \overrightarrow{DE} n'est pas colinéaire à \vec{n} . Donc, le point E, bien qu'appartenant au plan (ABC), n'est pas le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3) On a $\overrightarrow{AB}(-2, 0, -4)$ et $\overrightarrow{CD}(-2, -1, 1)$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2) \times (-2) + 0 \times (-1) + (-4) \times 1 = 4 - 4 = 0$. Donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux, ou encore, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4) Soit (Δ) la droite dont un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
. S'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 3 = -1 + 2t \\ 1 = -1 + t \\ -3 = 1 - t \end{cases}$$
, alors la première égalité impose $t = 2$ et la dernière impose $t = 4$. Ceci est impossible. Donc, C n'est pas

un point de (Δ) ou encore
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
, n'est pas un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

5) Le vecteur \overrightarrow{AI} a pour coordonnées $(-\frac{7}{5}, 0, -\frac{14}{5})$ et le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(-2, 0, -4)$.

Donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$. Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, ou encore, I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2

1)

a) **Limite de f en $-\infty$.**

- D'une part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$.
- D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Limite de f en $+\infty$.

Pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x^2}{e^x} = e \times \frac{1}{e^x/x^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x^2} = 0$ et finalement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Conséquence graphique. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x , on a

$$f'(x) = 2xe^{1-x} + x^2(-e^{1-x}) = xe^{1-x}(2-x).$$

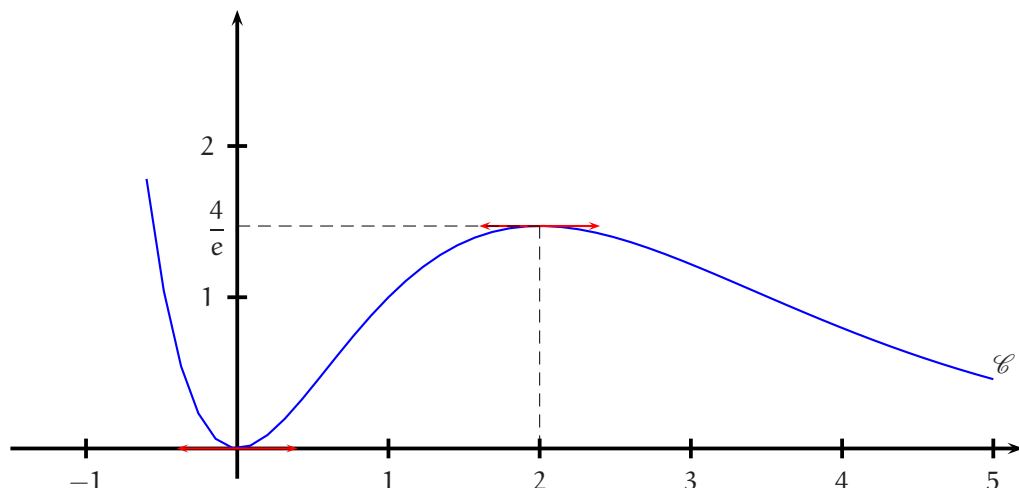
Ainsi,

$$\text{pour tout réel } x, f'(x) = x(2-x)e^{1-x}.$$

c) Pour tout réel x , on a $e^{1-x} > 0$. Donc, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et strictement négative sur $]0, 2[$. Enfin, la fonction f' s'annule en 0 et 2.

Tableau de variation de f et graphe de f.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
f	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0



2)

- a) Soit n un entier naturel non nul.
Pour x élément de $[0, 1]$, posons

$$u(x) = x^{n+1} \text{ et } v(x) = -e^{1-x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x élément de $[0, 1]$, on a

$$u'(x) = (n+1)x^n \text{ et } v'(x) = e^{1-x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \\ &= [x^{n+1}(-e^{1-x})]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x}) dx \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= -1 + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

- b) Le calcul précédent reste valable quand $n = 0$. Il fournit

$$I_1 = I_0 - 1 = -1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + (-1 + e) = e - 2.$$

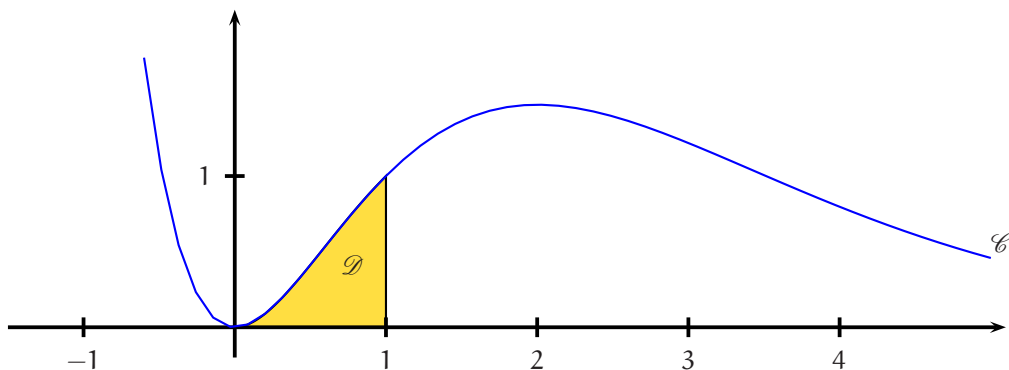
Puis,

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e - 2) - 1 = 2e - 5.$$

Donc,

$$I_1 = e - 2 \text{ et } I_2 = 2e - 5.$$

- c) Puisque la fonction f est positive sur $[0, 1]$, le nombre I_2 est l'aire du domaine \mathcal{D} ci-dessous, exprimée en unités d'aire, l'unité d'aire valant 4 cm^2 .



3)

- a) Soit n un entier naturel non nul.

Soit x un réel de $[0, 1]$. On a $1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 - 0$ ou encore $0 \leq 1 - x \leq 1$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ ou plus simplement $1 \leq e^{1-x} \leq e$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on obtient $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$. Donc,

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n.$$

b) Par croissance (et linéarité) de l'intégrale, on obtient alors

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx,$$

Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et donc,

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{e}{n+1}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

EXERCICE 3

Partie A : Question de cours

1) Théorème de BÉZOUT.

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS.

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et a est premier à b , alors a divise c .

2) Démonstration du théorème de GAUSS à partir du théorème de BÉZOUT.

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls tels que a divise bc et a soit premier à b .

Il existe un entier relatif k tel que $bc = ka$ et, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

On multiplie par c les deux membres de cette dernière égalité et on obtient

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv) \text{ (avec } cu + kv \text{ entier relatif).}$$

Ceci montre que a divise c .

Partie B

1) 12 et 19 sont premiers entre eux et donc, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $19u + 12v = 1$. Soit alors $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.

$$N - 13 = 13 \times (12v - 1) + 6 \times 19u = 13 \times (-19u) + 6 \times 19u = 19 \times (-7u) \text{ (avec } -7u \text{ entier relatif).}$$

Ceci montre que 19 divise $N - 13$ ce qui s'écrit encore $N - 13 \equiv 0 \pmod{19}$ ou enfin $N \equiv 13 \pmod{19}$.

De même,

$$N - 6 = 13 \times 12v + 6 \times (19u - 1) = 13 \times 12v + 6 \times (-12v) = 12 \times (7v).$$

ce qui montre que $N \equiv 6 \pmod{12}$.

2)

a) Par définition, $n_0 \equiv 13 \pmod{19}$ et $n_0 \equiv 6 \pmod{12}$. Donc, $n \equiv 13 \pmod{19}$ et $n \equiv 6 \pmod{12}$ si et seulement si $n \equiv n_0 \pmod{19}$ et $n \equiv n_0 \pmod{12}$.

b) Soit n un entier relatif.

$$\begin{aligned} \begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases} &\Leftrightarrow n - n_0 \text{ est divisible par 12 et par 19} \\ &\Leftrightarrow n - n_0 \text{ est divisible par } 12 \times 19 \text{ (car 12 et 19 sont premiers entre eux)} \\ &\Leftrightarrow n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19} \end{aligned}$$

3)

a) Déterminons un couple (u, v) grâce à l'algorithme d'EUCLIDE.

$$\begin{aligned} 19 &= 1 \times 12 + 7 \\ 12 &= 1 \times 7 + 5 \\ 7 &= 1 \times 5 + 2 \\ &5 = 2 \times 2 + 1. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7 \\ &= 3 \times (12 - 7) - 2 \times 7 = 3 \times 12 - 5 \times 7 \\ &= 3 \times 12 - 5 \times (19 - 12) = -5 \times 19 + 8 \times 12 \end{aligned}$$

Un couple (u, v) solution est $(-5, 8)$.

Pour ce couple (u, v) , on a $N = 13 \times 12 \times 8 - 5 \times 6 \times 19 = 678$.

b) Soit n un entier relatif. D'après 2)b) et 3)a),

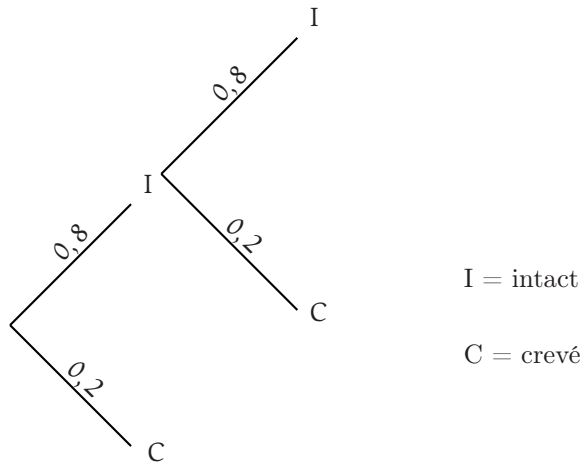
$$n \text{ solution de (S)} \Leftrightarrow n \equiv 678 \pmod{12 \times 19}.$$

Les entiers relatifs solutions de (S) sont donc les entiers de la forme $678 + 228k$, k entier relatif.

4) Si n est un tel entier alors $n \equiv 678 \pmod{228}$. Ceci fournit encore $n \equiv 678 - 2 \times 228 \pmod{228}$ ou enfin $n \equiv 222 \pmod{228}$. Comme $0 \leq 222 < 228$, le reste de la division euclidienne de n par 228 est 222.

EXERCICE 4

- 1) a) A chaque tir la probabilité que le ballon soit intact est $1 - 0,2$ ou encore $0,8$. Représentons la situation par un arbre.



Le ballon est intact au bout de deux tirs si et seulement si il est intact après le premier tir et après le second. La probabilité cherchée est donc

$$p = 0,8 \times 0,8 = 0,64.$$

- b) (Deux tirs suffisent pour crever le ballon si et seulement si le ballon est crevé après le premier tir ou alors est intact après le premier tir et crevé après le second). L'événement contraire de cet événement est l'événement « le ballon est intact au bout de deux tirs » dont la probabilité a été calculée en a). La probabilité cherchée est donc

$$p_2 = 1 - p = 0,36.$$

- c) Soit n un entier naturel non nul. (n tirs suffisent pour crever le ballon si et seulement si le ballon est crevé après le premier tir ou bien intact après le premier tir et crevé après le second ou intact après les deux premiers tirs et crevé après le troisième ... ou intact après les $n - 1$ premiers tirs et crevé après le n -ème). L'événement contraire de l'événement « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'événement « le ballon est intact au bout de n lancers » dont la probabilité est $(0,8)^n$. La probabilité cherchée est donc

$$p_n = 1 - (0,8)^n.$$

- d) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} p_n > 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,01 > (0,8)^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,01) > n \ln(0,8) \text{ (par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} = 20,6\dots \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 21. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 21$, la probabilité que n tirs suffisent pour crever le ballon est strictement supérieure à $0,99$.

- 2) Le tireur crève le ballon si et seulement si
- il obtient un 1 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de 1 tir
 - ou
 - il obtient un 2 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 2 tirs
 - ou
 - il obtient un 3 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 3 tirs

ou

- il obtient un 4 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 4 tirs

Pour k entier compris entre 1 et 4 la probabilité que le tireur obtienne le $n^{\circ} k$ en lançant le dé puis crève le ballon en au plus k lancers est $\frac{1}{4}p_k = \frac{1}{4}(1 - (0,8)^k)$. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{4} [(1 - (0,8)^1) + (1 - (0,8)^2) + (1 - (0,8)^3) + (1 - (0,8)^4)] = 1 - \frac{1}{4}(0,8) \frac{1 - (0,8)^4}{1 - 0,8} = 1 - (1 - (0,8)^4) = (0,8)^4 = 0,4096.$$

3)

a) $f_1 = \frac{58}{200} = 0,29$, $f_2 = \frac{49}{200} = 0,245$, $f_3 = \frac{52}{200} = 0,26$ et $f_4 = \frac{41}{200} = 0,205$.

b)

$$\begin{aligned} d^2 &= (0,29 - 0,25)^2 + (0,245 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,205 - 0,25)^2 \\ &= 0,0016 + 0,000025 + 0,0001 + 0,002025 \\ &= 0,00375. \end{aligned}$$

c) Le nombre 0,00375 se trouve entre le minimum et le neuvième décile de la série des 200 lancers d'un dé bien équilibré. On sait alors que on ne peut pas considérer que le dé est pipé au risque de 10%.