BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Rochambeau

EXERCICE 1

Question 1. Réponse C
Question 2. Réponse B
Question 3. Réponse C

Explications.

Question 1. On note O l'événement « le bulletin est marqué oui », N l'événement « le bulletin est marqué non » et B l'événement « le bulletin est blanc ».
On note X le gain algébrique du joueur (mise comprise). X prend trois valeurs : 30 centimes d'euro, -30 centimes d'euro et -10 centimes d'euro. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

$$p(X=30)=\frac{4}{10},\quad p(X=-10)=\frac{3}{10}\quad \text{et}\quad p(X=-30)=\frac{3}{10}.$$

L'espérance de la variable aléatoire X est donc

$$E(X)=30\times\frac{4}{10}-10\times\frac{3}{10}-30\times\frac{3}{10}=\frac{120-30-90}{10}=0.$$

Le jeu est donc équitable.

Question 2. Notons Y le nombre de bulletins marqués « oui » tirés. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le bulletin est marqué oui » avec une probabilité $p=0,4$ (d'après 2.) ou « le bulletin n'est pas marqué oui » avec une probabilité $1-p=0,6$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n=4$ et $p=0,4$.
La probabilité demandée est $p(Y\geq 1)$. Or,

$$p(Y\geq 1)=1-p(Y=0)=1-(0,6)^4=1-(\frac{3}{5})^4=1-\frac{81}{625}=\frac{544}{625}.$$

Question 3. Le nombre de cas possibles est le nombre de tirages simultanés de 2 bulletins parmi 10.
Il y a donc $\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$ tirages possibles.
Trouvons la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire de l'événement « le joueur tire deux bulletins identiques ».
Il y a trois types disjoints de cas favorables :
- tirages de deux bulletins marqués oui au nombre de $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$;
- tirages de deux bulletins marqués non au nombre de $\binom{3}{2}=3$;
- tirages de deux bulletins blancs au nombre de $\binom{3}{2}=3$.

La probabilité de l'événement « le joueur tire deux bulletins identiques » est donc $\frac{6+3+3}{45}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$.
La probabilité cherchée est alors

$$1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}.$$

EXERCICE 2

Partie A

1. **a)** On a

$$z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2e^{i\pi/3},$$

et

$$z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\pi/3}.$$

$$\boxed{z_B = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\pi/3}.}$$

b) Voir graphique à la fin.

2. Puisque z_B et z_C sont conjugués, on a déjà

$$OB = OC = |z_B| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Ensuite,

$$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ et } AC = |z_C - z_A| = |\overline{z_B - z_A}| = |z_B - z_A| = AB.$$

Finalement,

$$OB = BA = AC = CO = 2.$$

$$\boxed{\text{Le quadrilatère OBAC est un losange.}}$$

3. Soit z un nombre complexe dont l'image dans le plan est notée M.

$$|z| = |z - 2| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite d'équatiion } x = 1.$$

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est la droite d'équation } x = 1.}$$

Voir graphique plus à la fin.

Partie B

1. Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z = \frac{-4}{z-2} &\Leftrightarrow z(z-2) = -4 \text{ et } z \neq 2 \\ &\Leftrightarrow z(z-2) = -4 \text{ (car 2 n'est pas solution de l'équation } z(z-2) = -4 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation $(*)$ vaut $(-2)^2 - 4 \times 4$ ou encore

$$\Delta = -12 = (2i\sqrt{3})^2.$$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation $(*)$ admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} = z_B \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} = z_C.$$

b) On en déduit que le point associé à B est B lui-même et le point associé à C est C lui-même.

c) Calculons tout d'abord z_G.

$$z_G = \frac{1}{3}(z_O + z_A + z_B) = \frac{1}{3}(2 + 1 + i\sqrt{3}) = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3}.$$

Mais alors

$$z_{G'} = \frac{-4}{\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{3} - 2} = \frac{-12}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{-12(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})} = \frac{-12(-3 - i\sqrt{3})}{12} = 3 + i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{G'(3, \sqrt{3}).}$$

2. a) Question de cours :

• Montrons tout d'abord que pour tous complexes z_1 et z_2, on a $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Pour cela, posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ où a_1, b_1, a_2 et b_2 sont quatre réels. On a alors

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)\\ &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)} = \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)}\\ &= \overline{z_1 z_2}.\end{aligned}$$

Montrons alors que pour tous complexes z_1 et z_2, on a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

et puisque $|z_1.z_2|$, $|z_1|$ et $|z_2|$ sont des réels positifs, en prenant la racine carrée des deux membres, on obtient

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

• Soit z un nombre complexe non nul. D'après ce qui précède,

$$|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = \left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1,$$

et donc

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

b) Soit z un nombre complexe distinct de 2. On a

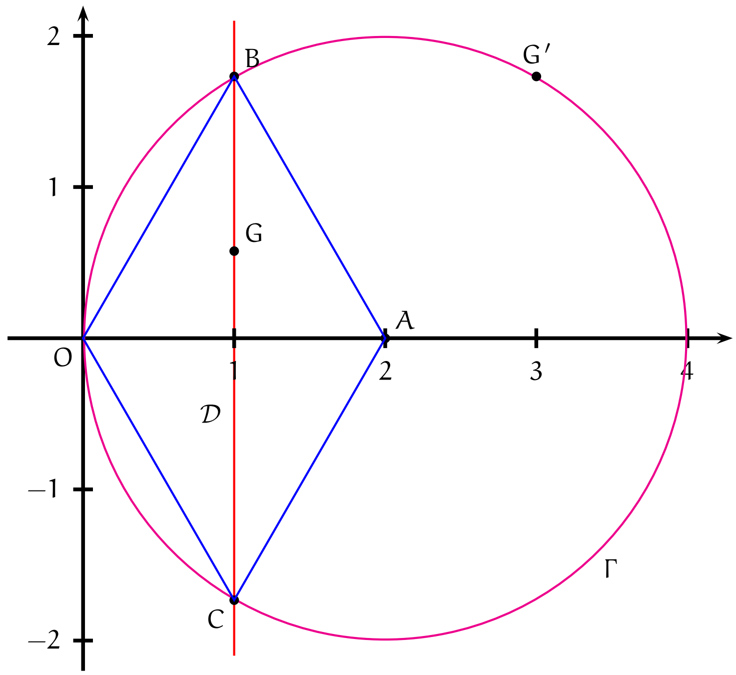
$$|z' - 2| = \left|\frac{-4}{z - 2} - 2\right| = \left|\frac{-4 - 2z + 4}{z - 2}\right| = \left|\frac{-2z}{z - 2}\right| = \frac{|-2||z|}{|z - 2|} = \frac{2|z|}{|z - 2|}.$$

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z \text{ distinct de 2, } |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}.}$$

c) Soit M un point de $\mathcal{D}$ dont l'affixe est notée z. Alors, $|z| = |z - 2|$ et on a

$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|} = \frac{2|z|}{|z|} = 2.$$

On en déduit que $IM' = 2$ où $I(2, 0)$ et donc que M' appartient au cercle Γ de centre $I(2, 0)$ et de rayon 2.


2
1
−1
−2
O
1
2
3
4
B
G′
G
A
𝒟
C
Γ

EXERCICE 3

1. • g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour x réel strictement positif,

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}.$$

g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{2}{x} = -\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

• g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$.
g est continue et strictement croissante sur $[2,3;2,4]$. De plus $g(2,3) = -0,03...$ et $g(2,4) = 0,04....$ Donc 0 appartient à l'intervalle $[g(2,3), g(2,4)]$. On en déduit que g s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[2,3;2,4]$ en un réel noté x_0. Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ s'annule une fois et une seule sur }]0,+\infty[\text{ en un réel noté } x_0.\\ \text{De plus, } 2,3 < x_0 < 2,4.\end{array}}$$

2. **a)** L'égalité $g(x_0) = 0$ s'écrit encore $\ln(x_0) = \frac{2}{x_0}$. Par suite,

$$f(x_0) = \frac{5\ln x_0}{x_0} = \frac{5\frac{2}{x_0}}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}.$$

$$\boxed{f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}.}$$

b) Soit a un réel strictement supérieur à 1. f est continue sur $[1,a]$ et donc $\int_1^a f(t)\,dt$ existe. De plus ($\frac{1}{t}\ln t$ est du type $u'.u$ avec $u = \ln t$ et une primitive de $u'.u$ est $\frac{1}{2}u^2$)

$$\int_1^a f(t)\,dt = 5\int_1^a \frac{1}{t}.\ln t\,dt = 5\left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^a = \frac{5}{2}\ln^2 a.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } a \text{ strictement supérieur à } 1, \int_1^a f(t)\,dt = \frac{5}{2}\ln^2 a.}$$

3. L'abscisse du point P_0 est le réel x_0 défini en 1. Puisque f est positive sur $[1,x_0]$, l'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine $\mathscr{D}_1$ exprimée en unités d'aire est $\int_1^{x_0} f(t)\,dt$. D'après la question 2.b), on a

$$\mathscr{A}_1 = \frac{5}{2}\ln^2 x_0 = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{x_0}\right)^2 = \frac{10}{x_0^2}.$$

Mais d'autre part, en notant $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ exprimée en unités d'aire, on a d'après la question 2.a),

$$\mathscr{A}_2 = 1 \times f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}.$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \frac{10}{x_0^2}.}$$

Ensuite, d'après la question 1, on a $2,3 < x_0 < 2,4$. On en déduit que $5,29 < x_0^2 < 5,76$ puis que $1,73... < \dfrac{10}{x_0^2} < 1,89...$
Finalement, on obtient un encadrement de $\mathscr{A}_1$ d'amplitude $0,2$:

$$\boxed{1,7 < \mathscr{A}_1 < 1,9.}$$

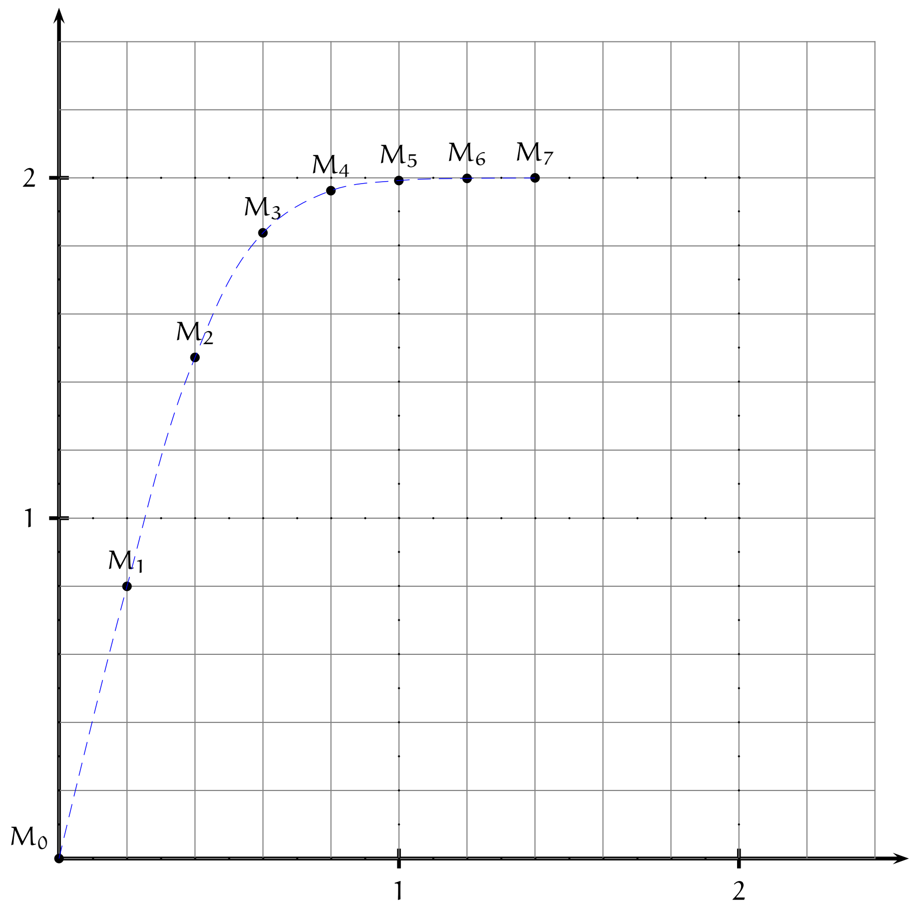
EXERCICE 4

Partie A : étude d'une suite

1. **a)** La machine fournit

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1	$1,2$	$1,4$
y_n	0	$0,8000$	$1,4720$	$1,8386$	$1,9625$	$1,9922$	$1,9984$	$1,9996$

b)



c) Il semblerait que la suite (y_n) soit strictement croissante et convergente (de limite 2 ?).

2. **a)** p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$p'(x) = -0,4x + 1 = -0,4(x - 2,5).$$

Mais alors, pour tout réel x de $[0,2]$, $p'(x) \geq 0$. p est donc croissante sur $[0,2]$. Par suite,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Rightarrow p(0) \leq p(x) \leq p(2) \Rightarrow 0,8 \leq p(x) \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq p(x) \leq 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si } x \in [0,2] \text{ alors } p(x) \in [0,2].}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $y_n \in [0, 2]$.

• $y_0 = 0$ et donc $y_0 \in [0, 2]$.

• Soit n un entier naturel. Supposons que $y_n \in [0, 2]$. Alors d'après a), $p(y_n) \in [0, 2]$ et donc $y_{n+1} \in [0, 2]$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq y_n \leq 2.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$y_{n+1} - y_n = (-0,2y_n^2 + y_n + 0,8) - y_n = -0,2y_n^2 + 0,8 = -0,2(y_n^2 - 4) = -0,2(y_n + 2)(y_n - 2).$$

Puisque y_n est inférieur ou égal à 2, cette dernière expression est positive.
On a montré que pour tout entier naturel n, on a $y_{n+1} - y_n \geq 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante.}}$$

d) D'après c), la suite (y_n) est croissante et d'après b), la suite (y_n) est majorée par 2. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est convergente.}}$$

Partie B : étude d'une fonction

1. On a déjà $g(0) = 2 \times \dfrac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 2 \times \dfrac{1 - 1}{1 + 1} = 0$. D'autre part, g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$g'(x) = 2\frac{(4e^{4x})(e^{4x} + 1) - (e^{4x} - 1)(4e^{4x})}{(e^{4x} + 1)^2} = 8\frac{e^{4x}\left((e^{4x} + 1) - (e^{4x} - 1)\right)}{(e^{4x} + 1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

D'autre part,

$$4 - (g(x))^2 = 4 - 4\frac{(e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4\left(1 - \frac{(e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2}\right) = 4\frac{(e^{4x} + 1)^2 - (e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

On a montré que

$$\boxed{(1) : g(0) = 0 \text{ et } (2) : \text{pour tout réel positif } x,\ g'(x) = 4 - (g(x))^2.}$$

2. a) Pour tout réel positif x, $e^{4x} \neq 0$ et on peut donc écrire

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}(1 - e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = 2\frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-4x} tend vers 0 et donc $g(x)$ tend vers 2.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2.}$$

On en déduit encore que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = 2 \text{ est asymptote à } (C_g) \text{ en } +\infty.}$$

b) On a vu à la question 1 que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout réel positif x

$$g'(x) = 16\frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}.$$

g' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

3. Notons (T) la tangente à (C_g) en O (on rappelle que $g(0) = 0$). Puisque $g'(0) = 16\dfrac{1}{(1+1)^2} = 4$, une équation de (T) est $y = 4x$. Les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (T) vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 4x \end{array}\right. \text{ qui est équivalent à } \left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{les coordonnées du point d'intersection de } (\Delta) \text{ et de } (T) \text{ sont } (\frac{1}{2}, 2).}$$

4.