

Exercice 1

Affirmation 1.a Faux

Affirmation 1.b Vrai

Affirmation 1.c Faux

Affirmation 2.a Vrai

Affirmation 2.b Faux

Affirmation 2.c Vrai

Affirmation 3.a Faux

Affirmation 3.b Vrai

Affirmation 3.c Vrai

Affirmation 3.d Faux

Explications.

Affirmation 1.a On prend $a = 1$ et $b = 2$. $(e^a)^b = (e^1)^2 = e^2 = 7,38\dots$ et $e^{(a^b)} = e^{1^2} = e^1 = e = 2,71\dots$. Dans ce cas, $(e^a)^b \neq e^{(a^b)}$ et il est donc faux de dire que le résultat est vrai pour tous réels a et b .

Affirmation 1.b C'est un résultat de cours.

Affirmation 1.c Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 est

$$y = e + e(x - 1) \quad \text{ou encore} \quad y = ex.$$

$y = x + 1$ est une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Affirmation 2.a C'est un résultat de cours.

Affirmation 2.b La fonction valeur absolue est définie et continue sur \mathbb{R} et en particulier continue en 0, mais cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Affirmation 2.c C'est un résultat de cours.

Affirmation 3.a $(+\infty) + (-\infty)$ est une forme indéterminée. Par exemple, si on prend $u_n = n$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = 0$ et $u_n + v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais si on prend $u_n = n + 1$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = 1$ et $u_n + v_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ ou si on prend $u_n = n + \sqrt{n}$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = \sqrt{n}$ et $u_n + v_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou si on prend $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = (-1)^n$ et $u_n + v_n$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Affirmation 3.b Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Si $\ell > 0$, la suite $(u_n \times v_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et si $\ell < 0$, la suite $(u_n \times v_n)$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Dans chacun des deux cas, la suite $(u_n \times v_n)$ n'a pas de limite réelle quand n tend vers $+\infty$. Donc dans tous les cas, la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.

Affirmation 3.c La phrase « (v_n) est positive » permet à la suite (v_n) de s'annuler, de sorte que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ n'est pas définie et en particulier ne converge pas. Même si on remplace la phrase « (v_n) est positive » par la phrase « (v_n) est strictement positive », la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de la limite de la suite (u_n) . Dans tous les cas, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.

Affirmation 3.d Pour n entier naturel donné, on prend $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Mais $\frac{u_n}{v_n} = n+1$ et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

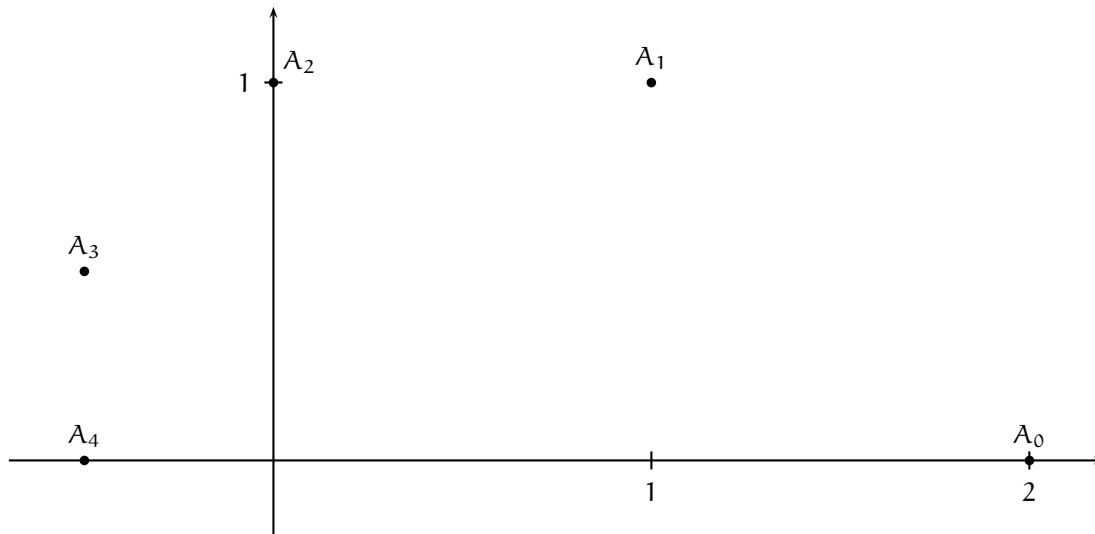
Il fallait penser aux formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\ell}{0}$, $\ell \neq 0$, qui fournissaient des contre-exemples.

Exercice 2

$$1. \quad z_1 = 2 \times \frac{1+i}{2} = 1+i. \quad z_2 = \frac{1+i}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i-1) = i. \quad z_3 = \frac{1+i}{2}i = \frac{-1+i}{2}.$$

$$z_4 = \frac{1+i-1+i}{2} = \frac{i^2-1^2}{4} = -\frac{1}{2}. \quad z_4 \text{ est bien un nombre réel.}$$

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 1+i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_4 = -\frac{1}{2}.$$



$$2. \quad \text{On a } \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Soit } n \text{ un entier naturel.}$$

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On sait alors que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \cdot q^n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$. Donc

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

3. Soit n un entier naturel. On note \mathcal{D} le disque de centre O et de rayon $0,1$.

$$A_n \in \mathcal{D} \Leftrightarrow OA_n \leq 0,1 \Leftrightarrow |z_n| \leq 0,1 \Leftrightarrow u_n \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 20 \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{2}^n) \geq \ln(20) \text{ (par croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2^{1/2}) \geq \ln(20) \Leftrightarrow n \frac{\ln(2)}{2} \geq \ln(20)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2 \ln(20)}{\ln(2)} (= 8,6\dots)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 9.$$

$$n_0 = 9.$$

4. a) Pour tout entier naturel n , $u_n \neq 0$ et donc pour tout entier naturel n , $z_n \neq 0$. Soit alors n un entier naturel.

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{2}{1+i} = 1 - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1 - (1-i) = i.$$

$$\text{pour tout entier naturel } n, \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i.$$

En passant aux modules, on obtient $|z_{n+1} - z_n| = |i| \times |z_{n+1}|$ et donc

$$\text{pour tout entier naturel } n, A_{n+1}A_n = A_{n+1}O \quad (1).$$

D'autre part, $z_{n+1} - z_n \neq 0$. On peut donc passer aux arguments ce qui fournit $\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(i) \pmod{2\pi}$.
En interprétant cette égalité en terme d'angles et on obtient

$$\text{pour tout entier naturel } n, (\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) = (\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad (2).$$

Les égalités (1) et (2) montrent que

$$\text{pour tout entier naturel } n, \text{ le triangle } OA_{n+1}A_n \text{ est isocèle rectangle direct.}$$

b) Soit k un entier naturel non nul.

$$A_{k-1}A_k = OA_k = u_k = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

On en déduit pour tout entier naturel non nul n que

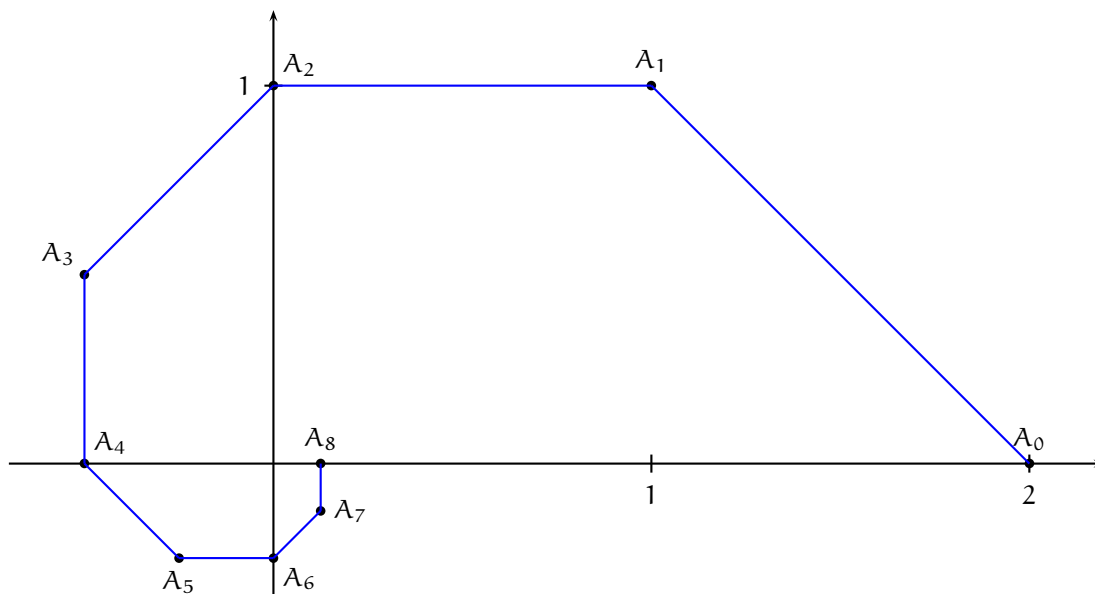
$$\begin{aligned} \ell_n &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ ($\ell_0 = 0$).

$$\text{pour tout entier naturel } n, \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

Comme $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, on sait que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (ℓ_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}.$$



Exercice 3

Partie A

1. Soit M un point de l'espace. On note (x, y, z) les coordonnées de M .

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \text{ est colinéaire à } \vec{n} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{IM} = t \vec{n}$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{cases}.$$

$$\text{un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a) Puisque Δ est la droite passant par I de vecteur directeur \vec{n} , il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

b) Les coordonnées de H sont $(x_I + ka, y_I + kb, z_I + kc)$.

$$H \in P \Leftrightarrow a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0 \Leftrightarrow k(a^2 + b^2 + c^2) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ car } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)).$$

$$k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

c) Mais alors

$$IH = \|\overrightarrow{IH}\| = |k| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Partie B

1. Puisque le plan Q est tangent à la sphère S , on sait que le rayon de S est la distance de Ω au plan Q . Or

$$d(\Omega, Q) = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 3 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$$S \text{ est une sphère de rayon } 2\sqrt{3}.$$

2. Δ est la droite passant par $\Omega(1, -1, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 1)$ (vecteur normal au plan Q). Un système d'équations paramétriques de Δ est donc

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Puisque Q est tangent à S , S et Q ont en commun un point et un seul qui est aussi le point d'intersection de Q et de Δ . Soient t un réel puis $M(1 + t, -1 - t, 3 + t)$ un point quelconque de Δ .

$$M \in Q \Leftrightarrow (1 + t) - (-1 - t) + (3 + t) - 11 = 0 \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Le point d'intersection de la sphère S et du plan Q est donc le point de coordonnées $(3, -3, 5)$.

Exercice 4

Partie A

1. Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Alors la fonction $g = \ln(f)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel positif t , on a $g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. Mais alors

$$\begin{aligned} \text{pour tout réel } t \text{ de } [0, +\infty[, f'(t) = -\frac{1}{20}f(t) [3 - \ln(f(t))] &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0, +\infty[, \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{20} [3 - \ln(f(t))] \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0, +\infty[, g'(t) = -\frac{1}{20} [3 - g(t)] \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } t \text{ de } [0, +\infty[, g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

2. Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto C.e^{at} - \frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Ici, $a = \frac{1}{20}$ et $b = -\frac{3}{20}$. Donc

les solutions sur $[0, +\infty[$ de l'équation (H) sont les fonctions g définies sur $[0, +\infty[$ par :
pour tout réel positif t , $g(t) = 3 + Ce^{t/20}$ où C est une constante réelle.

3. Mais alors, d'après 1., il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0, +\infty[$,

$$f(t) = e^{g(t)} = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

4. a. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{20} = +\infty$. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{t}{20}\right) = +\infty$, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} 3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$. Comme $\lim_{X \rightarrow -\infty} \exp(X) = 0$, on a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

b. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t , on a

$$f'(t) = \frac{1}{20} \times (-3) \exp\left(\frac{t}{20}\right) \times \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) = -\frac{3}{20} \exp\left(\frac{t}{20}\right) \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} et donc, sur $[0, +\infty[$, f' est strictement négative sur $[0, +\infty[$. On en déduit que

f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

c. Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} f(t) < 0,02 &\Leftrightarrow \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < \frac{1}{50} \\ &\Leftrightarrow 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln\left(\frac{1}{50}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \exp\left(\frac{t}{20}\right) > 3 + \ln(50) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{t}{20}\right) > 1 + \frac{\ln(50)}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow t > 20 \ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right) = 16,6\dots \end{aligned}$$

Puisque 0,02 millier d'individus = 20 individus, le réel ci-dessus est le nombre d'années cherché. On veut un nombre entier d'années à partir duquel la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus. Donc

au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Partie B

1. L'énoncé donne directement $p(M) = p(\overline{M}) = 0,5$, puis $p_M(T) = 0,99$ et enfin $p_{\overline{M}}(T) = 0,001$.
2. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,5 \times 0,99 + 0,5 \times 0,001 = 0,5 \times 0,991 = 0,4955. \end{aligned}$$

$$p(T) = 0,4955.$$

3. $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,5 \times 0,99}{0,4955} = 0,998\dots$ Comme $p_T(M) < 0,999$,

le test n'est pas fiable.