BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1.

1. Soit M un point du plan différent du point B. On note z son affixe (z est différent de -1).

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow z - 1 = z(z+1) \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i. \end{aligned}$$

Les points invariants par f sont les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

2.

a) Soit z un nombre complexe différent de -1.

$$(z' - 1)(z + 1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = \frac{-2}{z+1}(z+1) = -2 \ (*).$$

b) En prenant les modules des deux membres, on obtient $|z' - 1|.|z + 1| = |-2| = 2$.

Pour tout complexe z différent de -1, $|z' - 1| = \dfrac{2}{|z+1|}$.

L'égalité $|z' - 1| \times |z + 1| = 2$ montre en particulier que $z' - 1 \neq 0$ et donc qu'un argument de $z' - 1$ existe. En passant aux arguments dans la relation $(*)$, on obtient $\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \arg(-2) = \pi \ (2\pi)$.

Pour tout complexe z différent de -1, $\arg(z' - 1) = -\arg(z + 1) + \pi \ (2\pi)$.

Ceci s'interprète géométriquement.

$$AM' = |z' - a| = |z' - 1| = \frac{2}{|z+1|} = \frac{2}{BM},$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) &= \arg(z_{\overrightarrow{AM'}}) = \arg(z' - a) \\ &= \arg(z' - 1) = \pi - \arg(z + 1) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}) \ (2\pi). \end{aligned}$$

Pour tout point M distinct de B, $AM' = \dfrac{2}{BM}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}) \ (2\pi)$.

3. Soit M un point du plan distinct de B.

$$M \in (C) \Leftrightarrow BM = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM' = 1 \Leftrightarrow M' \in (C').$$

4.

a) $p + 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2e^{2i\pi/3}$.

$$\boxed{p + 1 = 2e^{2i\pi/3}.}$$

b) $BP = |p - b| = |p + 1| = |2e^{2i\pi/3}| = 2$. Donc

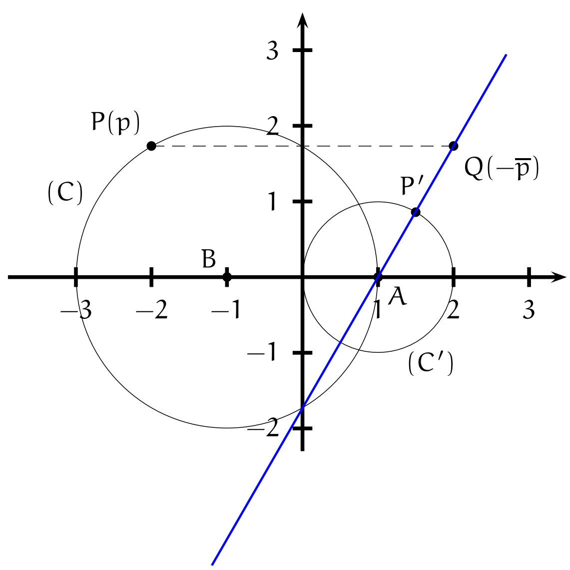
$$\boxed{P \text{ appartient au cercle } (C).}$$

c) D'après 2. b), $(p' - 1)(p + 1) = -2 \neq 0$ et en particulier p' est différent de 1 ou encore P' n'est pas le point A. D'autre part, p n'est pas réel. Il en est de même de $-\overline{p}$. En particulier, $-\overline{p}$ est différent de 1 ou encore Q n'est pas le point A. Ensuite,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) &= \arg(p' - 1) - \arg(-\overline{p} - 1) = \arg(p' - 1) - \arg(-\overline{p + 1}) \\
&= \arg(p' - 1) - (\pi - \arg(p + 1)) \\
&= \arg(p' - 1) + \arg(p + 1) - \pi \\
&= 0 \ (2\pi) \text{ (d'après 2. b))}
\end{aligned}$$

On en déduit que les points A, P et Q sont alignés.

d) D'après 4. b) et 3., le point P' est sur (C'). D'autre part, d'après c), $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP'}) = 0 \ (2\pi)$ ce qui montre que P' est sur la demi-droite $[AQ)$.
Pour construire le point P', on commence donc par construire le symétrique du point P par rapport à l'axe (Oy). On trace ensuite la droite (AQ). Elle coupe le cercle (C') en deux points. Un et un seul de ces deux points est sur la demi-droite (AQ) : le point P'.



EXERCICE 2

Proposition 1.	**Faux**
Proposition 2.	**Vrai**
Proposition 3.	**Faux**
Proposition 4.	**Vrai**
Proposition 5.	**Vrai**

Démonstrations.

Proposition 1. (L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ ($\neq \overrightarrow{0}$) passant par A.) On note $(\mathscr{P})$ ce plan.

Les coordonnées du point I sont $(1, 2, 0)$ et donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ sont $(1, 2, -2)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(2, -4, 0)$. Donc,

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 1 \times 2 + 2 \times (-4) + (-2) \times 0 = -6 \neq 0,$$

ce qui montre le point I n'est pas dans $(\mathscr{P})$. La proposition 1 est donc fausse.

Proposition 2. Soit M un point du plan.

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{CB}\| \Leftrightarrow MI = \frac{BC}{2}.$$

L'ensemble considéré est la sphère de centre I, le milieu de $[BC]$ et de rayon $\frac{BC}{2}$ qui est aussi la sphère de diamètre $[BC]$. La proposition 2 est donc vraie.

Proposition 3. La droite (OB) est perpendiculaire au plan (OAC) car $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = 0$. Donc, la hauteur issue de B du tétraèdre $(OABC)$ est OB. Le volume de $(OABC)$ est donc

$$\frac{1}{3} \times \text{aire}(OAC) \times OB = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 4 = \frac{8}{3}.$$

Proposition 4. Il est clair que les points A, B et C ne sont pas alignés. Ces trois points déterminent donc un et un seul plan. Il est aussi clair que les coordonnées de chacun de ces trois points vérifient l'équation $2x+y+2z = 4$. Le plan (ABC) est donc bien le plan d'équation $2x + y + 2z = 4$. Notons alors H' le point de coordonnées $(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$.

Puisque $2 \times \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + 2 \times \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = 4$, le point H' appartient au plan (ABC). Enfin, un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, 1, 2)$. $\overrightarrow{OH'}$ a pour coordonnées $(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$ et donc

$$\overrightarrow{OH'} = \frac{4}{9}\overrightarrow{n}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OH'}$ est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ ce qui montre finalement que H' est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) ou encore que le point H a pour coordonnées $(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$.

Proposition 5. Puisque $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, le point G a pour coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. En particulier, le point G n'est pas le point A et les points A et G définissent une et une seule droite.

Dans la représentation paramétrique de l'énoncé, $t = 0$ fournit le point A et $t = \frac{2}{3}$ fournit le point G. La droite (AG) admet donc effectivement pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{array}\right.$, $(t \in \mathbb{R})$.

EXERCICE 3

1. a) 572 personnes n'ont eu aucun retard le premier mois et donc $1000-572=428$ personnes ont eu au moins un retard le premier mois. La probabilité cherchée est

$$\boxed{\frac{428}{1000}=0{,}428.}$$

b) 572 personnes n'ont eu aucun retard le premier mois. Parmi celles-ci, $250+60=310$ personnes ont eu au moins un retard le deuxième mois. La probabilité cherchée est donc

$$\boxed{\frac{310}{572}=\frac{155}{286}=0,54...}$$

2. a) $p_1=\frac{572}{1000}=0,572$, $q_1=\frac{318}{1000}=0,318$ et $r_1=\frac{110}{1000}=0,11$.

b) (Les probabilités fournies par l'énoncé sont des probabilités conditionnelles. Par exemple, $0,46=p_{A_n}(A_{n+1})$). Chaque mois, un personne a soit 0 retard, soit exactement un retard, soit au moins deux retard, chacune de ces possibilités excluant les deux autres. Donc

$$\begin{aligned}p(A_{n+1}) &= p(A_{n+1}\cap A_n)+p(A_{n+1}\cap B_n)+p(A_{n+1}\cap C_n)\\ &= p(A_n)\times p_{A_n}(A_{n+1})+p(B_n)\times p_{B_n}(A_{n+1})+p(C_n)\times p_{C_n}(A_{n+1})\\ &= 0,46p_n+0,66q_n+0,66r_n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1}=0,46p_n+0,66q_n+0,66r_n.}$$

c) Soit n un entier naturel non nul. On a bien sûr $p_n+q_n+r_n=1$ ou encore $q_n+r_n=1-p_n$. On en déduit que

$$p_{n+1}=0,46p_n+0,66(q_n+r_n)=0,46p_n+0,66(1-p_n)=-0,2p_n+0,66.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1}=-0,2p_n+0,66.}$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1}=p_{n+1}-0,55=-0,2p_n+0,66-0,55=-0,2p_n+0,11=-0,2(p_n-0,55)=-0,2.u_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } -0,2.}$$

e) Puisque $-1<-0,2<1$, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et comme $p_n=0,55+u_n$, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=0,55.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. F est la primitive de f qui s'annule en 2.

Pour tout réel x, on a $F'(x) = f(x)$. Le tableau de variation de la fonction f montre en particulier que f est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et s'annule en 0. On en déduit que

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour tout réel x de $[2, 3]$, on a $0 \leq f(x) \leq 4e^{-2}$. Par positivité de l'intégrale, on a alors $F(3) = \int_2^3 f(x)\,dx \geq 0$ et par croissance de l'intégrale, on a

$$F(3) = \int_2^3 f(x)\,dx \leq \int_2^3 4e^{-2}\,dx = (3-2).4e^{-2} = 4e^{-2}.$$

Donc

$$\boxed{0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}.}$$

Partie B

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Ainsi, f' est strictement positive sur $]0, 2[$, strictement négative sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et s'annule en 0 et 2. f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Le tableau de variation de la fonction f est bien celui donné dans la partie **A**.

b) Soit x un réel. Soit M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (Γ) de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2-1)e^{-x}.$$

Cette dernière expression est du signe de $x^2 - 1$. On en déduit que

- $y_M - y_N > 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
- $y_M - y_N < 0$ si $x \in]-1, 1[$,
- $y_M - y_N = 0$ si $x \in \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(C) \text{ est strictement au-dessus de } (\Gamma) \text{ sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,\\ (C) \text{ est strictement au-dessous de } (\Gamma) \text{ sur }]-1, 1[\\ (C) \text{ et } (\Gamma) \text{ se coupent aux points de coordonnées } (-1, e) \text{ et } (1, e^{-1})\end{array}}$$

2. a) H est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$H'(x) = (-2x-2)e^{-x} + (-x^2-2x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x^2+2x+1-2x-2) = (x^2-1)e^{-x} = h(x).$$

Donc

$$\boxed{H \text{ est une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit α un réel supérieur ou égal à 1. D'après 1. b), pour tout réel x de $[1, \alpha]$, on a $g(x) \leq f(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(a) &= \int_1^\alpha (fx) - g(x))\,dx = \int_1^\alpha (x^2-1)e^{-x}\,dx = \int_1^\alpha h(x)\,dx\\ &= [H(x)]_1^\alpha = \left[(-x^2-2x-1)e^{-x}\right]_1^\alpha = -(\alpha^2+2\alpha+1)e^{-\alpha} + 4e^{-1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout réel } a,\ \mathscr{A}(a) = \frac{4}{e} - (\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha}.}$$

c) Pour tout réel a, on a $-(\alpha^2+2\alpha+1)e^{-\alpha} = -\alpha^2 e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha}$. D'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que chacun de ces termes tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} \mathscr{A}(a) = \frac{4}{e}.}$$

3. a) Voir graphique plus loin.

b) $PQ = |x_P - x_Q| = x_P - x_Q$ (par lecture graphique, $x_P > x_Q$) et $f(x_P) = m = g(x_Q)$.

c) L'égalité $PQ = 1$ fournit $x_Q = x_P - 1$. L'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$ s'écrit alors $x_P^2 e^{-x_P} = e^{-(x_P-1)}$ ou encore (puisque $e^{-x_P} \neq 0$) $x_P^2 = e$ ou enfin $x_P = -\sqrt{e}$ (car $x_P \leq -1$).

$$\boxed{x_P = -\sqrt{e} = -1,64...}$$