BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-5, -2, 4)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Les trois points A, B et C n'étant pas alignés, ils déterminent un et un seul plan. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\overrightarrow{u}$ dont les coordonnées sont $(2, -3, 1)$. Puisque

$$2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = -10 + 6 + 4 = 0 \text{ et que } 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, la droite (d) est orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (AC) et donc

$$\boxed{\text{la droite } (d) \text{ est orthogonale au plan } (ABC).}$$

b) Le plan (ABC) est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ passant par A.
Soit M un point de l'espace. On note (x, y, z) ses coordonnées.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) - 3(y-1) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 4 = 0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } 2x - 3y + z - 4 = 0.}$$

3. a) Puisque la droite (d) est orthogonale au plan (ABC), elle est sécante à ce plan en un unique point que l'on note H.
Notons H' le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$. On a alors

$$x_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2x_A - x_B + 2x_C) = -(-4+3+6) = -5$$

et de même

$$y_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2y_A - y_B + 2y_C) = -(-2+1+4) = -3 \text{ et } z_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2z_A - z_B + 2z_C) = -(-6-7+8) = 5.$$

Les coordonnées du point H' sont donc $(-5, -3, 5)$.

- Puisque $2 \times (-5) - 3 \times (-3) + 5 - 4 = -10 + 9 + 5 - 4 = 0$, le point H' appartient au plan (ABC).
- Puisque $\left\{\begin{array}{l} x_{H'} = -5 = -7 + 2 \times 1 \\ y_{H'} = -3 = -3 \times 1 \\ z_{H'} = 5 = 4 + 1 \end{array}\right.$, le point H' appartient à la droite (d).

Finalement, le point H' est la point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (d). Donc $H' = H$.

$$\boxed{H \text{ est le barycentre de } (A; -2), (B; -1) \text{ et } (C; 2).}$$

b) Pour tout point M de l'espace, on a

$$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}.$$

Donc

$$M\in\Gamma_1\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CB}=0.$$

$$\boxed{\Gamma_1 \text{ est le plan de vecteur normal } \overrightarrow{CB} \text{ passant par } H.}$$

c) Pour tout point M de l'espace

$$M\in\Gamma_2\Leftrightarrow\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}\Leftrightarrow\|\overrightarrow{HM}\|=\sqrt{29}\Leftrightarrow HM=\sqrt{29}.$$

$$\boxed{\Gamma_2 \text{ est la sphère de centre } H \text{ et de rayon } \sqrt{29}.}$$

d) L'intersection de Γ_1 et de Γ_2 est l'intersection de la sphère de centre H et de rayon $\sqrt{29}$ avec un plan passant par H. Il s'agit d'un cercle de centre H et de même rayon que la sphère.

$$\boxed{\Gamma_1\cap\Gamma_2 \text{ est le cercle de centre } H \text{ et de rayon } \sqrt{29} \text{ du plan } \Gamma_1.}$$

e) Le vecteur $\overrightarrow{HS}$ a pour coordonnées $(-3,4,-2)$. Donc $HS=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$.

Le point S appartient à la sphère Γ_2.

Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $(-6,-3,3)$. Donc $\overrightarrow{HS}.\overrightarrow{CB}=(-3)\times(-6)+4\times(-3)+(-2)\times3=18-12-6=0$.

Le point S appartient au plan Γ_1.

Finalement,

$$\boxed{\text{Le point } S \text{ appartient à l'intersection de } \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2.}$$

EXERCICE 2

1. a) L'expression complexe de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est $z' - i = \sqrt{2}(z - i)$. Donc

$$z_{B_1} = \sqrt{2}z_B + i - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}).$$

b) L'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est $z' - i = e^{i\pi/4}(z - i)$. Donc

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z_{B_1} + i - i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[2\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})\right] + \frac{\sqrt{2}}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + i\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 3 + 2i. \end{aligned}$$

$\boxed{B' \text{ est le point d'affixe } 3 + 2i.}$

Voir figure à la fin de l'exercice.

2. a) Si $z = 2$, alors $z' = 2(1 + i) + 1 = 3 + 2i$. Le point B a donc bien pour image B'.

b) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow -iz = 1 \Leftrightarrow i(-i)z = i \Leftrightarrow z = i \Leftrightarrow M = A.$$

Donc f admet un et un seul point invariant, le point A.

c) Soit z un nombre complexe distinct de i.

$$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1+i)z + 1 - z}{i - z} = \frac{1 + iz}{i - z} = \frac{-i(i - z)}{i - z} = -i.$$

En passant aux modules, on obtient $\frac{|z' - z|}{|i - z|} = 1$ ce qui signifie en termes de distances que $MM' = AM$.

$$MM' = MA \quad (1).$$

D'autre part $\arg\left(\frac{z' - z}{i - z}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) ce qui signifie en terme d'angles que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi) \quad (2).$$

Les égalités (1) et (2) fournissent une construction géométrique du point M' à partir des points A et M car elles signifient

$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ M' \text{ est l'image de } A \text{ par la rotation de centre } M \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}.}$

3. a) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$|z - 2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}.$$

$\boxed{\Sigma_1 \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

b) Soit z un nombre complexe.

$$z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i = (1+i)z - 2(1+i) = (1+i)(z - 2).$$

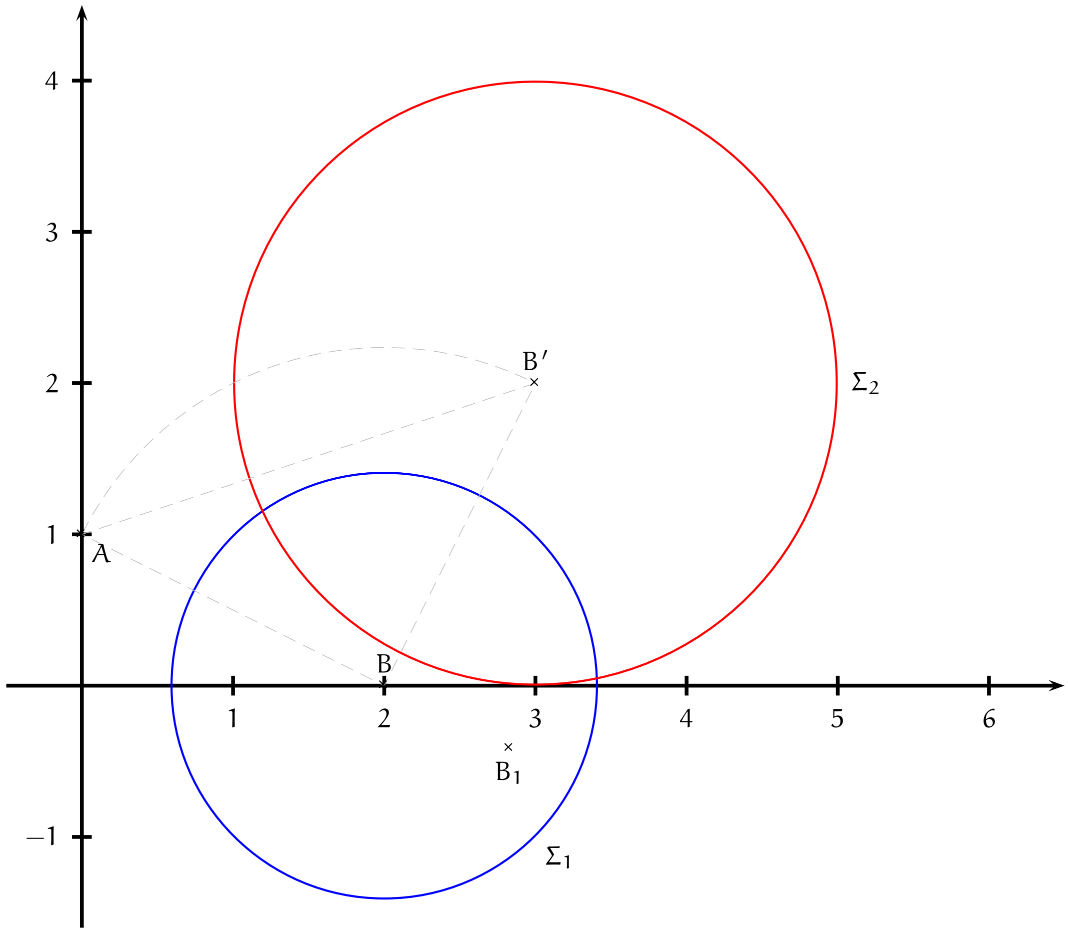
Soit M un point de Σ_1. On note z son affixe. On a $|z - 2| = \sqrt{2}$. Mais alors

$$|z - (3 + 2i)| = |1 + i|.|z - 2| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

On en déduit que M' appartient au cercle Σ_2 de centre B' et de rayon 2.

$$\boxed{\Sigma_2 \text{ est le cercle de centre } B' \text{ et de rayon } 2.}$$

c)



EXERCICE 3

Partie A : étude d'une fonction

1. **a)** Pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $x+1>0$. Donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}.$$

Pour $x>0$, on a $\ln(x+1)>0$ et $\dfrac{x}{x+1}>0$. Donc f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et f est ainsi strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) On a $f(0)=0$ et $f'(0)=0$. Donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe (C) au point O.

2. **a)** Pour tout réel x distinct de -1, on a

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}.$$

On choisit alors a, b et c tels que $a=1$, $a+b=0$ et $b+c=0$ c'est-à-dire $a=1$, $b=-1$ et $c=1$. On obtient

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ distinct de } -1,\ \frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}.}$$

b) La fonction proposée est continue sur $[0,1]$. Donc I existe. De plus,

$$I=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln(2).$$

$$\boxed{I=\ln(2)-\frac{1}{2}.}$$

3. La fonction f est continue et positive sur $[0,1]$. Donc l'aire cherchée vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Pour x appartenant à $[0,1]$, posons

$$u(x)=\frac{x^2}{2}\quad\text{et}\quad v(x)=\ln(x+1).$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$, on a

$$u'(x)=x\quad\text{et}\quad v'(x)=\frac{1}{x+1}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx&=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}\,dx\\&=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,dx\ \text{(par linéarité de l'intégrale)}\\&=\frac{1}{2}(\ln(2)-I)\\&=\frac{1}{2}\left(\ln(2)-(\ln(2)-\frac{1}{2})\right)\ \text{(d'après 2. b))}\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{4}\text{ u. a.}}$$

4. f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f(0)=0$ et $f(1)=\ln(2)=0,6...$ ce qui montre que $0,25 \in [f(0), f(1)]$. On en déduit que l'équation $f(x)=0,25$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$. On note α cette solution.

On demande à la calculatrice un tableau de valeurs avec un pas $h=0,1$. On lit $f(0,5)=0,202...$ et $f(0,6)=0,282...$ Ainsi, $f(0,5) \leq f(\alpha) \leq f(0,6)$ et puisque f est croissante sur $[0,1]$, on en déduit $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$.
De même, avec un pas $h=0,01$, on lit $f(0,56)=0,24..$ et $f(0,57)=0,25...$ Ainsi, $f(0,56) \leq f(\alpha) \leq f(0,57)$ et on obtient un encadrement de α à 10^{-2} près :

$$\boxed{0,56 \leq \alpha \leq 0,57.}$$

Partie B : étude d'une suite

1. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx-\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx=\int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1)-x^n\ln(x+1))\,dx=\int_0^1 (x-1)x^n\ln(x+1)\,dx.$$

Or, pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x-1 \leq 0$, $x^n \geq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$. Donc pour tout réel x de $[0,1]$, $(x-1)x^n\ln(x+1) \leq 0$. On en déduit que $\int_0^1 (x-1)x^n\ln(x+1)\,dx \leq 0$ et donc que $u_{n+1}-u_n \leq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}-u_n \leq 0$. Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est une suite décroissante.}}$$

D'autre part, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n\ln(x+1) \geq 0$. Mais alors, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

2. Soit n un entier naturel.
Soit x un réel de $[0,1]$. Alors $1 \leq x+1 \leq 2$ et puisque la fonction ln est croissante sur $[0,1]$, on a $\ln 1 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$. Donc

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2).$$

On multiplie les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on a montré que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leq x^n\ln(x+1) \leq x^n\ln(2).$$

Par positivité et croissance de l'intégrale on a alors

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n\ln(2)\,dx.$$

Mais, $\int_0^1 x^n\ln(2)\,dx=\ln(2)\int_0^1 x^n\,dx=\ln(2).\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{\ln(2)}{n+1}$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.}$$

Puisque $\frac{\ln(2)}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n=0.}$$

EXERCICE 4

1. Calculons d'abord $p(X \leq t)$ et $p(X > t)$ pour λ réel et t réel positif donnés.

$$p(X \leq \lambda) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1),$$

et

$$p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t} \quad (2).$$

Par suite,

$$p(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln(0,3) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,3}{6}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,3)}{6} = 0,20 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

2. (L'énoncé est confus et il faut probablement le comprendre comme on a envie de le comprendre.)

Soit t un réel positif.

$$p(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,5) \Leftrightarrow -0,2t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,2}.$$

0n a $\dfrac{\ln(2)}{0,2} = 3,46...$ Or 46% d'une année durent $\dfrac{46}{100} \times 12 = 5,5...$ mois. L'instant t cherché est donc

$$\boxed{\text{3 ans et 5 mois à un mois près.}}$$

3. La probabilité cherchée est $p(X > 2)$ c'est-à-dire $e^{-2.0,2} = e^{-0,4}$ (d'après (2) et puisque $\lambda = 0,2$).

4. La probabilité cherchée est $p((X > 6)/(X > 2))$. D'après (2), on a

$$p((X > 6)/(X > 2)) = \frac{p((X > 6) \cap (X > 2))}{p(X > 2)} = \frac{p(X > 6)}{p(X > 2)} = \frac{e^{-0,2.6}}{e^{-0,2.2}} = e^{-0,2.4} = e^{-0,8}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } e^{-0,8} \text{ ou encore } 0,44 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

5. Notons Y le nombre de robots qui n'ont pas eu de panne au cours des deux premières années. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

• 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

• chaque expérience a deux issues : « le robot n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $p = e^{-0,4}$ (d'après 2.) ou « le robot est tombé en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $1 - p = 1 - e^{-0,4}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = e^{-0,4}$.

La probabilité demandée est $p(Y \geq 1)$ et on a

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} = 0,99 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

