BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

EXERCICE 1

1)	**Vrai**
2)	**Faux**
3)	**Vrai**
4)	**Faux**
5)	**Vrai**

Explications.

1) Soit (P) le plan d'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$.

- $2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 4 + 8 - 12 = 0$. Donc $A \in (P)$.
- $2 \times 0 + 2 \times 4 - (-3) - 11 = 8 + 3 - 11 = 0$. Donc $B \in (P)$.
- $2 \times 3 + 2 \times 1 - (-3) - 11 = 6 + 2 + 3 - 11 = 0$. Donc $C \in (P)$.

D'autre part, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 0, -4)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1, -3, -4)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles aux coordonnées de $\overrightarrow{AB}$) et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit qu'il existe un et un seul plan les contenant : le plan (P).

2) $2 \times 3 + 2 \times 2 - (-1) - 11 = 6 + 4 + 1 - 11 = 0$. Donc le point E appartient au plan (ABC).
Un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, 2, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $(2, 2, 1)$ et il est clair que $\overrightarrow{DE}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Donc, le point E, bien qu'appartenant au plan (ABC), n'est pas le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3) On a $\overrightarrow{AB}(-2, 0, -4)$ et $\overrightarrow{CD}(-2, -1, 1)$. Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-2) \times (-2) + 0 \times (-1) + (-4) \times 1 = 4 - 4 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, ou encore, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4) Soit (Δ) la droite dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. S'il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} 3 = -1 + 2t \\ 1 = -1 + t \\ -3 = 1 - t \end{array}\right.$, alors la première égalité impose $t = 2$ et la dernière impose $t = 4$. Ceci est impossible. Donc, C n'est pas un point de (Δ) ou encore $\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, n'est pas un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

5) Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées $(-\dfrac{7}{5}, 0, -\dfrac{14}{5})$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 0, -4)$.
Donc, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{7}{10}\overrightarrow{AB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ou encore, I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2

1)

a) Limite de f en $-\infty$.

- D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$.
- D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$.

Pour tout réel x, $f(x) = e\times\dfrac{x^2}{e^x} = e\times\dfrac{1}{e^x/x^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$ et finalement que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Conséquence graphique. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 2xe^{1-x} + x^2(-e^{1-x}) = xe^{1-x}(2-x).$$

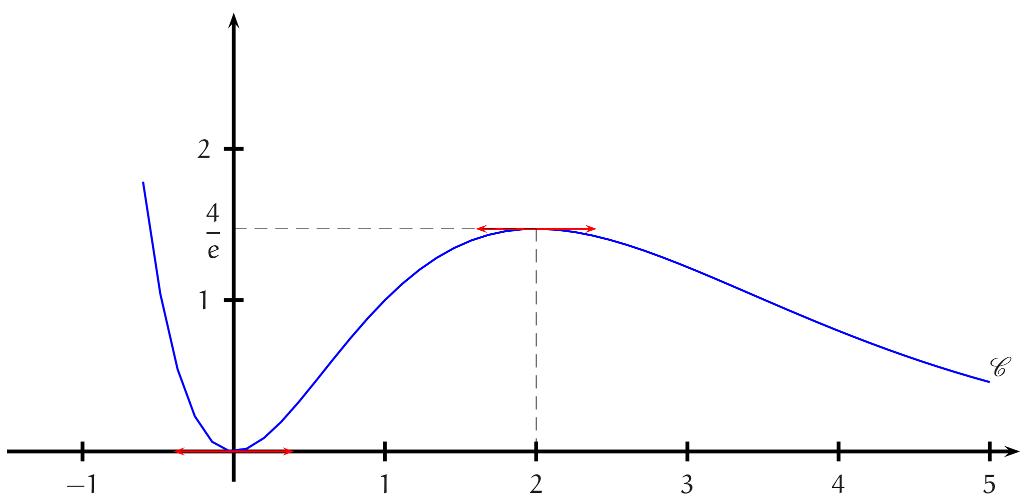
Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = x(2-x)e^{1-x}.}$$

c) Pour tout réel x, on a $e^{1-x} > 0$. Donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et strictement négative sur $]0, 2[$. Enfin, la fonction f' s'annule en 0 et 2.

Tableau de variation de f et graphe de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0



2)

a) Soit n un entier naturel non nul.
Pour x élément de $[0, 1]$, posons

$$u(x) = x^{n+1} \text{ et } v(x) = -e^{1-x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x élément de $[0, 1]$, on a

$$u'(x) = (n+1)x^n \text{ et } v'(x) = e^{1-x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx \\
&= \left[x^{n+1}(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x})\,dx \\
&= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -1 + (n+1)I_n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.}$$

b) Le calcul précédent reste valable quand $n = 0$. Il fournit

$$I_1 = I_0 - 1 = -1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx = -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -1 + (-1+e) = e - 2.$$

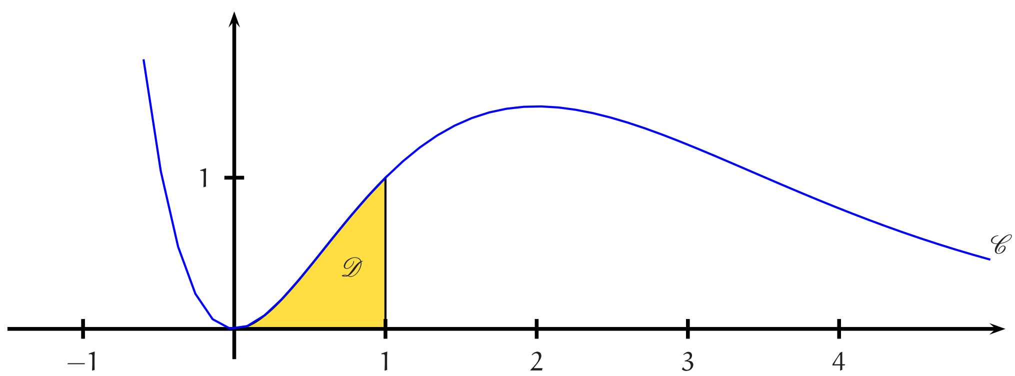
Puis,

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5.$$

Donc,

$$\boxed{I_1 = e - 2 \text{ et } I_2 = 2e - 5.}$$

c) Puisque la fonction f est positive sur $[0, 1]$, le nombre I_2 est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ ci-dessous, exprimée en unités d'aire, l'unité d'aire valant 4 cm^2.



3)

a) Soit n un entier naturel non nul.
Soit x un réel de $[0, 1]$. On a $1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 - 0$ ou encore $0 \leq 1 - x \leq 1$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ ou plus simplement $1 \leq e^{1-x} \leq e$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on obtient $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1],\ x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n.}$$

b) Par croissance (et linéarité) de l'intégrale, on obtient alors

$$\int_0^1 x^n \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leq e \int_0^1 x^n \, dx,$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, \ \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

Comme $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{e}{n+1}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 3

1) Question de cours

a) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{z'}.z'\right) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif,}$$

et donc

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

b) Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &= \arg(c-a) - \arg(b-a)\\ &= \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)\\ &= (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})\\ &= (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif (d'après la relation de Chasles).}\end{aligned}$$

2)

a) Soit z un nombre complexe non nul.

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{z.\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2}z.$$

Comme $\frac{1}{|z|^2}$ est un réel strictement positif, on a $\arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) = 0$ à $2k\pi$ près avec k entier relatif et donc

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(z) = \arg(z) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

Soit alors M un point du plan distinct de l'origine O.

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = 0 \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

On en déduit que

$$\boxed{M' \text{ appartient à la demi-droite } [OM).}$$

b) Soit M un point du plan distinct de l'origine O.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z.\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1.$$

Donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des points } M \text{ de } P \setminus \{O\} \text{ tels que } f(M) = M \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$$

c) Soit M un point du plan distinct de O, U et V.

$$\begin{aligned}\frac{z'-1}{z'-i} &= \frac{\frac{1}{\overline{z}} - 1}{\frac{1}{\overline{z}} - i} = \frac{\frac{1-\overline{z}}{\overline{z}}}{\frac{1-i\overline{z}}{\overline{z}}} = \frac{1-\overline{z}}{1-i\overline{z}} = \frac{\overline{z}-1}{i\overline{z}-1} = \frac{1}{i}\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\\ &= \frac{-i}{i.(-i)}\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} = -i\,\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{pour tout complexe non nul } z,\ \frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i} = -i\,\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.}$$

Puisque $\dfrac{z'-1}{z'-i} \neq 0$, on peut passer aux arguments et on obtient

$$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg\left(-i \times \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\right) = \arg(-i) + \arg\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \text{ à } 2k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif.}$$

3)

a) Soit z un nombre complexe différent de 1 et de i. D'après le résultat de cours redémontré en 1)b),

$$\begin{aligned}
M \in (UV) &\Leftrightarrow (\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM}) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} \text{ est un réel non nul.}
\end{aligned}$$

b) Soit z un nombre complexe différent de 0, 1 et i. D'après le résultat de la fin de la question 2)c),

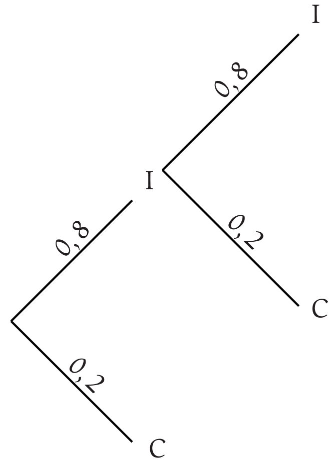
$$\begin{aligned}
M \in (UV)\setminus\{U, V\} &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{VM'}, \overrightarrow{UM'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{VM'}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } k\pi \text{ près avec } k \text{ entier relatif}\\
&\Leftrightarrow M' \text{ appartient au cercle de diamètre } [UV] \text{ privé de } U \text{ et } V.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'image par } f \text{ de la droite } (UV) \text{ privée de } U \text{ et } V \text{ est le cercle de diamètre } [UV] \text{ privé de } U \text{ et } V.}$$

EXERCICE 4

1)

a) A chaque tir la probabilité que le ballon soit intact est $1 - 0,2$ ou encore $0,8$. Représentons la situation par un arbre.



I = intact

C = crevé

Le ballon est intact au bout de deux tirs si et seulement si il est intact après le premier tir et après le second. La probabilité cherchée est donc

$$p = 0,8 \times 0,8 = 0,64.$$

b) (Deux tirs suffisent pour crever le ballon si et seulement si le ballon est crevé après le premier tir ou alors est intact après le premier tir et crevé après le second). L'événement contraire de cet événement est l'événement « le ballon est intact au bout de deux tirs » dont la probabilité a été calculée en a). La probabilité cherchée est donc

$$p_2 = 1 - p = 0,36.$$

c) Soit n un entier naturel non nul. (n tirs suffisent pour crever le ballon si et seulement si le ballon est crevé après le premier tir ou bien intact après le premier tir et crevé après le second ou intact après les deux premiers tirs et crevé après le troisième ... ou intact après les $n-1$ premiers tirs et crevé après le n-ème). L'événement contraire de l'événement « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'événement « le ballon est intact au bout de n lancers » dont la probabilité est $(0,8)^n$. La probabilité cherchée est donc

$$\boxed{p_n = 1 - (0,8)^n.}$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
p_n > 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,01 > (0,8)^n \\
&\Leftrightarrow \ln(0,01) > n\ln(0,8) \text{ (par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} = 20,6\ldots \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geq 21.
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 21$, la probabilité que n tirs suffisent pour crever le ballon est strictement supérieure à $0,99$.

2) Le tireur crève le ballon si et seulement si
- il obtient un 1 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de 1 tir

ou
- il obtient un 2 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 2 tirs

ou
- il obtient un 3 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 3 tirs

ou
• il obtient un 4 en lançant le dé puis crève le ballon au bout de au plus 4 tirs

Pour k entier compris entre 1 et 4 la probabilité que le tireur obtienne le n° k en lançant le dé puis crève le ballon en au plus k lancers est $\frac{1}{4}p_k = \frac{1}{4}(1-(0,8)^k)$. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{4}\left[(1-(0,8)^1)+(1-(0,8)^2)+(1-(0,8)^3)+(1-(0,8)^4)\right] = 1-\frac{1}{4}(0,8)\frac{1-(0,8)^4}{1-0,8} = 1-(1-(0,8)^4) = (0,8)^4 = 0,4096.$$

3)

a) $f_1 = \frac{58}{200} = 0,29$, $f_2 = \frac{49}{200} = 0,245$, $f_3 = \frac{52}{200} = 0,26$ et $f_4 = \frac{41}{200} = 0,205$.

b)

$$\begin{aligned} d^2 &= (0,29-0,25)^2 + (0,245-0,25)^2 + (0,26-0,25)^2 + (0,205-0,25)^2 \\ &= 0,001\,6 + 0,000\,025 + 0,000\,1 + 0,002\,025 \\ &= 0,003\,75. \end{aligned}$$

c) Le nombre 0,003 75 se trouve entre le minimum et le neuvième décile de la série des 200 lancers d'un dé bien équilibré. On sait alors que on ne peut pas considérer que le dé est pipé au risque de 10%.

