BACCALAUREAT GENERAL

Session Septembre 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour tout réel positif x, on a

$$f(x) = (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x} = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x} = -40\left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}.$$

On a déjà $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 10e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -40\left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2) f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 20\times e^{-\frac{1}{2}x} + (20x+10)\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = (20-(10x+5))e^{-\frac{1}{2}x} = (-10x+15)e^{-\frac{1}{2}x} = 10(-x+\frac{3}{2})e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Puisque $10e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x+\frac{3}{2}$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur l'intervalle $[0,\frac{3}{2}[$, strictement négative sur l'intervalle $]\frac{3}{2},+\infty[$ et s'annule en $\frac{3}{2}$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	10	$\nearrow$	$40e^{-3/4}$	$\searrow$	0

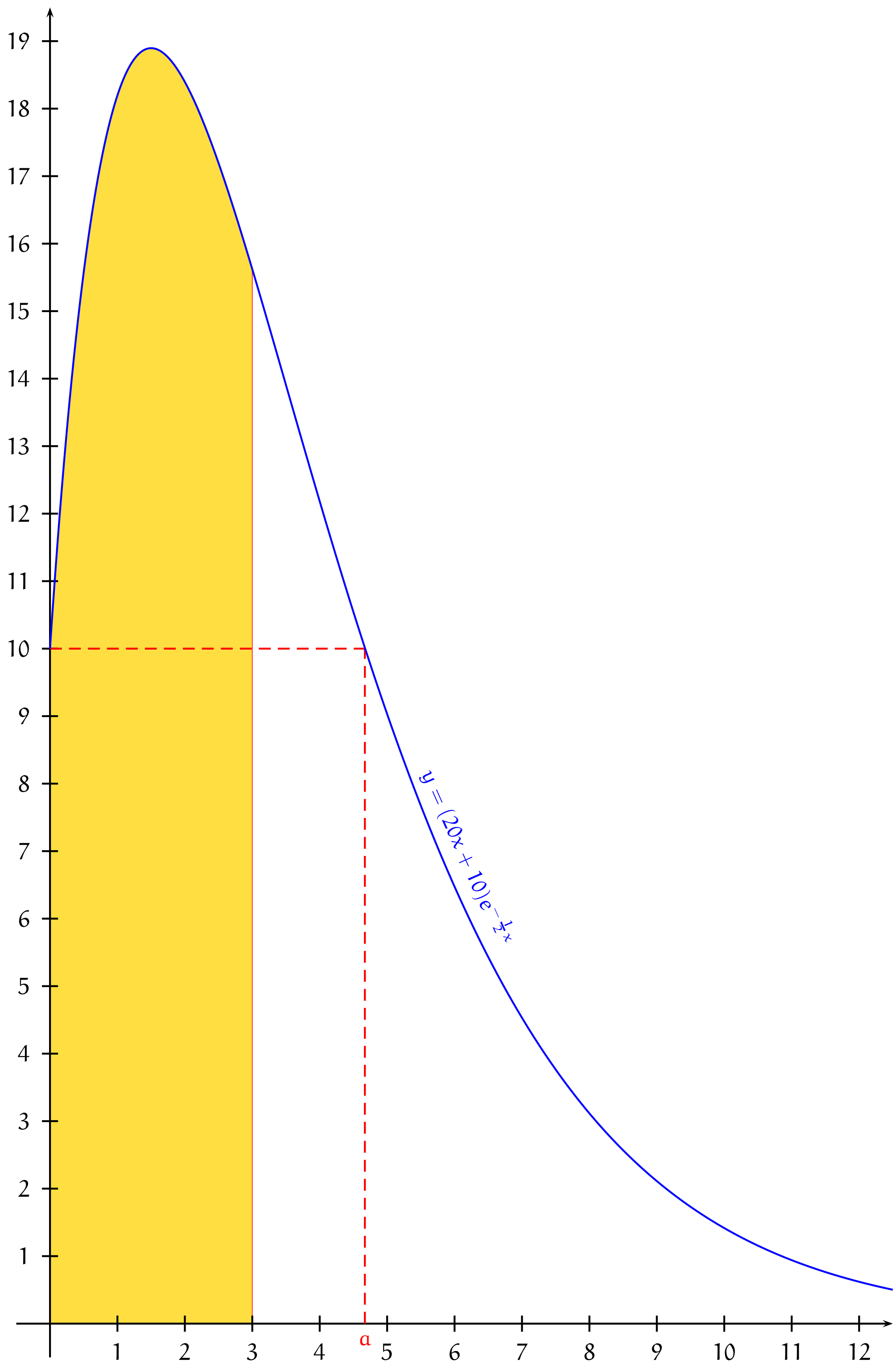
3) Déjà $f(0) = 10$. Ensuite, f est strictement croissante sur l'intervalle $[0,\frac{3}{2}]$. Ainsi, si $x \in]0,\frac{3}{2}]$, $f(x) > f(0)$ ou encore $f(x) > 10$. L'équation $f(x) = 10$ n'a donc pas de solution dans l'intervalle $]0,\frac{3}{2}]$.
Sur l'intervalle $[\frac{3}{2},+\infty[$, f est continue et strictement décroissante. Puisque $f(\frac{3}{2}) = 40e^{-3/4}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $]0,40e^{-3/4}]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[\frac{3}{2},+\infty[$. Comme $40e^{-3/4} = 18,8\ldots$, on a $0 < 10 < 40e^{-3/4}$ et donc l'équation $f(x) = 10$ admet une solution et une seule dans $[\frac{3}{2},+\infty[$.
En résumé,

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 10 \text{ possède une et une seule solution strictement positive notée } \alpha \text{ dans }]0,+\infty[.}$$

La machine donne $f(4,673) = 10,0009\ldots$ et $f(4,674) = 9,997\ldots$. Par suite, $f(4,673) > f(\alpha) > f(4,674)$ et donc, puisque f est strictement décroissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$, on a $4,673 < \alpha < 4,674$. Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 4,673 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

4)



5) Calculons l'intégrale proposée à l'aide d'une intégration par parties.
Pour x élément de l'intervalle $[0, 3]$, posons $u(x) = (20x + 10)$ et $v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 3]$ et pour tout réel x de $[0, 3]$, $u'(x) = 20$ et $v'(x) = (-2)(-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$.

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\ dx &= \int_0^3 (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}\ dx\\ &= \left[(20x+10)(-2e^{-\frac{1}{2}x})\right]_0^3 - \int_0^3 20\times(-2e^{-\frac{1}{2}x})\ dx = -140e^{-1,5}+20+40\int_0^3 e^{-\frac{1}{2}x}\ dx\\ &= 20-140e^{-1,5}+40\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 = 20-140e^{-1,5}+40(-2e^{-1,5}+2) = 100-220e^{-1,5}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^3 f(x)\ dx = 100-220e^{-1,5}.}$$

Partie B

1) D'après la question A.2., f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel t de $[0,+\infty[$, on a

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t) = (-10t+15)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}(20t+10)e^{-\frac{1}{2}t} = (-10t+15+10t+5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) \text{ sur l'intervalle } [0,+\infty[.}$$

2) a) Soit g une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que $g(0)=10$. $g-f$ est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et pour tout réel t de $[0,+\infty[$,

$$(g-f)'(t)+\frac{1}{2}(g-f)(t) = \left(g'(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)-\left(f'(t)+\frac{1}{2}f(t)\right) = 20e^{-\frac{1}{2}t}-20e^{-\frac{1}{2}t} = 0.$$

Donc, la fonction $g-f$ est solution de l'équation différentielle (E') sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b) On sait que pour a réel donné, les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto Ce^{at}$ où C est un réel. Donc les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme $t\mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t}$ où C est un réel.

c) Il existe donc un réel C tel que pour tout réel positif t, $g(t)-f(t)=Ce^{-\frac{1}{2}t}$. Quand $t=0$, on obtient $Ce^0=g(0)-f(0)$ et donc $C=10-10=0$. Ainsi, pour tout réel positif t, on a $g(t)-f(t)=0$ et donc $g=f$.

$$\boxed{f \text{ est l'unique solution de l'équation différentielle } (E) \text{ sur } [0,+\infty[\text{ qui prend la valeur } 10 \text{ en } 0.}$$

3) Soit t_0 un réel positif. La température de la réaction chimique redescend à a valeur initiale au bout de t heures si et seulement si $t_0=a$. Or $4,673<a<4,674$ et de plus $4,673$h $=$ 4h $40,38$min et $4,674$h $=$ 4h $40,34$min. Donc $t_0=$ 4h 40min arrondi à la minute.

$$\boxed{\text{La température de la réaction chimique redescend à a valeur initiale au bout de 4h 40min (arrondi à la minute).}}$$

4) D'après la question A.5., $\theta = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(t)\ dt = \dfrac{100-220e^{-1,5}}{3} = 16,9\ldots$.

$$\boxed{\theta = \frac{100-220e^{-1,5}}{3} \text{ degrés Celsius} = 17^\circ \text{ (arrondi au degré).}}$$

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1)	**D**
2)	**C**
3)	**C**
4)	**A**
5)	**D**

Explications.

1) Soit x un entier relatif.
- Si $x \equiv 0$ (modulo 6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (modulo 6) et donc $x^2 - x + 4 \not\equiv 0$ (modulo 6).
- Si $x \equiv 1$ (modulo 6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (modulo 6) et donc $x^2 - x + 4 \not\equiv 0$ (modulo 6).
- Si $x \equiv 2$ (modulo 6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 6$ (modulo 6) et donc $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (modulo 6).
- Si $x \equiv 3$ (modulo 6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (modulo 6) et donc $x^2 - x + 4 \not\equiv 0$ (modulo 6).
- Si $x \equiv 4$ (modulo 6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (modulo 6) et donc $x^2 - x + 4 \not\equiv 0$ (modulo 6).
- Si $x \equiv 5$ (modulo 6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (modulo 6).

2) L'équation s'écrit encore $12x + 17y = 1$. Puisque 12 et 17 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout montre que cette équation a des solutions dans $\mathbb{Z}$.
Puisque $12 \times (-7) + 17 \times 5 = -84 + 85 = 1$, on sait que les couples d'entiers relatifs solutions sont les couples de la forme $(-7 + 17k, 5 - 12k)$.

3) $n = 1789 = 1785 + 4 = 17 \times 105 + 4$. Donc $n \equiv 4$ (modulo 17).
Ensuite, $p = n^{2005}$ et donc $p \equiv 4^{2005}$ (modulo 17). Or $4^{2005} = 4^{2004} \times 4 = (4^2)^{1002} \times 4 = (16)^{1002} \times 4$ et donc

$$4^{2005} \equiv (-1)^{1002} \times 4 \text{ (modulo 17) ou encore } p \equiv 4 \text{ (modulo 17)}.$$

4) Notons r la rotation de centre M est d'angle $\frac{\pi}{2}$. L'expression complexe de r est $z' - z_M = e^{i\pi}2(z - z_M)$. Donc

$$AMB \text{ est rectangle isocèle direct} \Leftrightarrow B = r(A) \Leftrightarrow b - z = i(a - z) \Leftrightarrow z - iz = b - ia \Leftrightarrow z = \frac{b - ia}{1 - i}.$$

5) Une symétrie centrale est encore une rotation d'angle π et donc h une similitude directe de rapport 1.
Puisque f, g et h sont des similitudes directes, $h \circ g \circ f$ est une similitude directe.
Puisque le produit des rapports de f, g et h vaut 1, $h \circ g \circ f$ est une isométrie directe et donc $h \circ g \circ f$ est soit une rotation, soit une translation.
Puisque $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi = 2\pi$, $h \circ g \circ f$ est une translation t. Le vecteur de cette translation est le vecteur $\overrightarrow{At(A)}$. Or $t(A) = h(g(f(A))) = h(g(A)) = h(A) = B$ et donc $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 3

1) a) Un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(1,2,0)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = (-2)\times 1 + 1\times 2 + 5\times 0 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux ou encore

$$\boxed{\text{les plans } \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{R} \text{ sont perpendiculaires.}}$$

b) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires et en particulier sécants en une droite Δ. On sait que tout vecteur non nul et orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur directeur de Δ. Or

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 2\times(-2) + (-1)\times 1 + 1\times 5 = -5+5 = 0 \text{ et } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n'} = 2\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 0 = 2-2 = 0.$$

Donc, $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

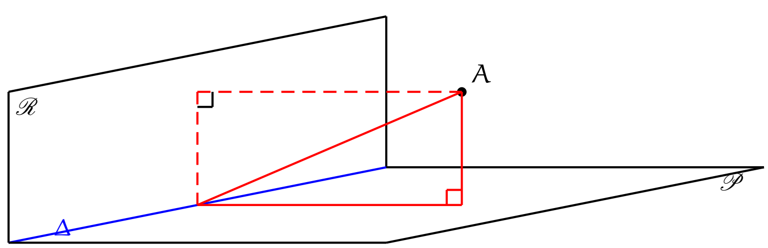
D'autre part, une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $-2(x-1)+(y+2)+5(z-1)=0$ ou encore $-2x+y+5z-1=0$. Comme $-2\times(-1)+4+5\times(-1)-1 = 6-6 = 0$, le point C appartient au plan $\mathscr{P}$. De même, $(-1)+2\times 4-7 = 8-8 = 0$ et le point C appartient au plan $\mathscr{R}$. Finalement, le point C appartient au plan $\mathscr{P}$ et au plan $\mathscr{R}$ et donc à la droite Δ.

$$\boxed{\Delta \text{ est la droite passant par } C(-1;4;-1) \text{ et de vecteur directeur } \overrightarrow{u}(2;-1;1).}$$

c) $d(A,\mathscr{P}) = \dfrac{|-2\times 5 + (-2) + 5\times(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+5^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{30}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ et $d(A,\mathscr{R}) = \dfrac{|(5)+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+0^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

$$\boxed{d(A,\mathscr{P}) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \text{ et } d(A,\mathscr{R}) = \frac{6}{\sqrt{5}}.}$$

d)



Puisque les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que,

$$d(A,\Delta)^2 = d(A,\mathscr{P})^2 + d(A,\mathscr{R})^2 = \frac{9\times 6}{5} + \frac{36}{5} = \frac{90}{5} = 18,$$

et donc

$$\boxed{d(A,\Delta) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.}$$

2) a) Soit t un nombre réel.

$$\varphi(t) = AM_t = \sqrt{(1+2t-5)^2+(3-t+2)^2+(t+1)^2} = \sqrt{(2t-4)^2+(5-t)^2+(t+1)^2} = \sqrt{6t^2-24t+42}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t,\ \varphi(t) = \sqrt{6t^2-24t+42}.}$$

b) Pour tout réel t, $6t^2 - 24t + 42 = 6(t-2)^2 + 18$ et donc $6t^2 - 24t + 42 > 0$. Ainsi, la fonction φ est de la forme $\sqrt{u}$ où u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive. On sait alors que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel t,

$$\boxed{\varphi'(t) = \frac{(6t^2 - 24t + 42)'}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{12t - 24}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{6(t-2)}{\sqrt{6t^2 - 24t + 42}}.}$$

Pour tout réel t, $\varphi'(t)$ est du signe de $t - 2$. Donc, la fonction φ' est strictement négative sur $]-\infty, 2[$ et strictement positive sur $]2, +\infty[$.

La fonction φ est ainsi strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. On en déduit que φ admet un minimum, atteint en 2 avec

$$\varphi(2) = \sqrt{6 \times 2^2 - 24 \times 2 + 42} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\varphi \text{ admet un minimum égal à } 3\sqrt{2}.}$$

c) La droite dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{array}\right.$$

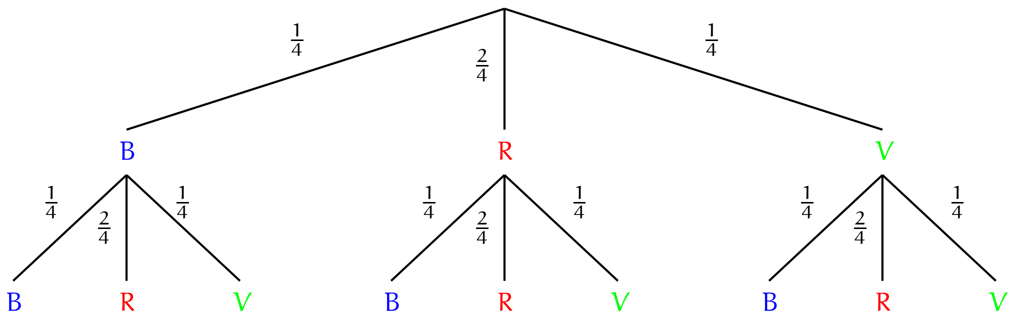
est la droite passant par le point $M_{-1}(-1, 4, -1)$ c'est-à-dire le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2, -1, 1)$: cette droite est la droite Δ.
Ainsi, quand t décrit $\mathbb{R}$, le point M_t décrit la droite Δ. Le minimum de la fonction φ est donc la valeur minimum de la distance de A à un point de la droite Δ On sait que ce minimum est la distance du point A à la droite Δ.

$$\boxed{\text{Le minimum de la fonction } \varphi \text{ est la distance du point } A \text{ à la droite } \Delta.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



Notons B_1, (respectivement R_1, V_1, B_2, R_2 et V_2) les événements « obtenir une face bleue (respectivement verte, rouge) au premier (respectivement deuxième) lancer ». Puisque les lancers de dés sont indépendants, on a

$$p(E) = p(V_1 \cap V_2) = p(V_1)p(V_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

et

$$p(F) = p(V_1 \cap V_2) + p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

$$\boxed{p(E) = \frac{1}{16} \text{ et } p(F) = \frac{3}{8}.}$$

2) Notons X le nombre de parties à l'issue desquelles les deux faces sont de la même couleur. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « les deux faces sont de la même couleur » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ (d'après la question 1)) ou « les deux faces sont de couleurs différentes » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 2)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geq 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{3}{8}\right)^0\left(\frac{5}{8}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^1\left(\frac{5}{8}\right)^9 = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} - 10 \times \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^9 \\ &= 0,936 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement } F \text{ au cours de } 10 \text{ parties est } 0,936 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

Partie B

Erreur d'énoncé : $30 + 48 + 46 + 32 = 156 \neq 160$. Nous proposons une correction en prenant $n_1 = 34$ au lieu de $n_1 = 30$. La machine fournit

$$d^2_{obs} = \left(\frac{34}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{48}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{46}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{32}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0,0078\ldots.$$

On constate alors que $d^2_{obs} < D_9$ et donc

$$\boxed{\text{on peut considérer au risque de } 10\% \text{ que le dé est parfaitement équilibré.}}$$

