BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Rochambeau

EXERCICE 1

1. (b)

2. (b)

3. (c)

4. (a)

Explications.

1. On note a, b et c les affixes des points A, B et C. On a

$$b - a = (-3 - i) - (-2 + 3i) = -1 - 4i,\ c - a = (2,08 + 1,98i) - (-2 + 3i) = 4,08 - 1,02i \text{ et}$$
$$c - b = (2,08 + 1,98i) - (-3 - i) = 5,08 + 2,98i\ .$$

Puis

$$AB = |b - a| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17},\ AC = |c - a| = \sqrt{4,08^2 + (-1,02)^2} = \sqrt{16,6464 + 1,0404} = \sqrt{17,6868} \text{ et}$$
$$BC = |c - b| = \sqrt{5,08^2 + 2,98^2} = \sqrt{25,8064 + 8,8804} = \sqrt{34,6868}.$$

Les trois distances sont deux à deux distinctes et donc le triangle ABC n'est pas isocèle. Le plus grand des trois côtés est BC et de plus $AB^2 + AC^2 = 17 + 17,6868 = 34,6868 = BC^2$. Donc le triangle ABC est rectangle en A.

2. Notons A le point d'affixe $a = 4i$ et B le point d'affixe $b = -2$. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow z \neq b \text{ et } \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1 \Leftrightarrow z \neq b \text{ et } |z - a| = |z - b| \Leftrightarrow M \neq B \text{ et } AM = BM \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB].

3.

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \neq b \text{ et il existe un réel } k \text{ tel que } z - a = k(z - b) \Leftrightarrow M \neq B \text{ et il existe un réel } k \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$$
$$\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}.$$

L'ensemble cherché est la droite (AB) privée du point B.

4. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega,$$

ce qui donne ici

$$z' = e^{-i\pi/3}(z - i) + i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i) + i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

EXERCICE 2

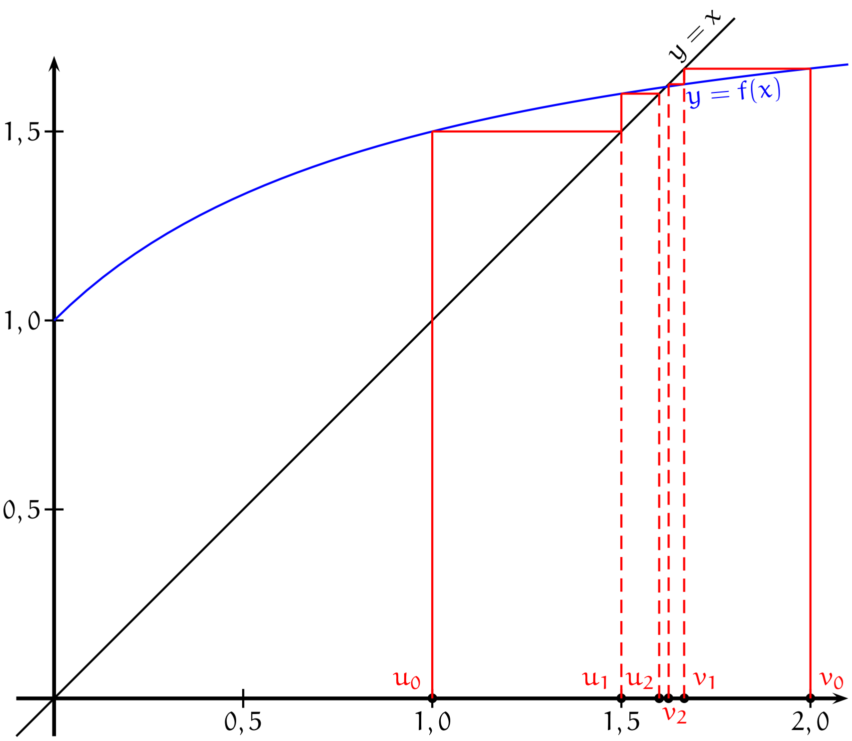
1. f est dérivable sur $[0;2]$ en tant que fraction rationnelle définie sur $[0;2]$ et pour x élément de $[0;2]$,

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de f est positive sur l'intervalle $[0;2]$ et donc la fonction f est croissante sur $[0;2]$.
Soit x un élément de $[0;2]$. Puisque f est croissante sur l'intervalle $[1;2]$, on a $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ ce qui s'écrit encore $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$. Mais $\frac{3}{2} \geq 1$ et $\frac{5}{3} \leq 2$. Par suite, $1 \leq f(x) \leq 2$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [1;2], \text{ on a } f(x) \in [1;2].}$$

2. a.



Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante, que la suite (v_n) soit décroissante et que les deux suites (u_n) et (v_n) soient convergentes et possèdent la même limite.
b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.

- Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ et donc $1 \leq v_0 \leq 2$. L'encadrement à démontrer est donc vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $1 \leq v_n \leq 2$. D'après la question 1., on peut affirmer que $1 \leq f(v_n) \leq 2$ ou encore que $1 \leq v_{n+1} \leq 2$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \ 1 \leq v_n \leq 2.}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

- Pour $n = 0$, on a $v_1 - v_0 = \frac{5}{3} - 2 \leq 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $v_{n+1} - v_n \leq 0$. D'après ci-dessus, les deux expressions $v_n + 1$ et $v_{n+1} + 1$ sont strictement positives. De plus

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_{n+1} &= \frac{2v_{n+1}+1}{v_{n+1}+1} - \frac{2v_n+1}{v_n+1} = \frac{(2v_{n+1}+1)(v_n+1) - (v_{n+1}+1)(2v_n+1)}{(v_{n+1}+1)(v_n+1)} \\ &= \frac{v_{n+1} - v_n}{(v_{n+1}+1)(v_n+1)} \leq 0 \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} \leq v_n.}$$

c. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} \\ &= \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.}$$

Comme le produit $(v_n+1)(u_n+1)$ est strictement positif, le signe de $v_{n+1}-u_{n+1}$ est le signe de v_n-u_n.

Ainsi, la suite (v_n-u_n) est de signe constant à savoir le signe de son premier terme. Or, $v_0-u_0 = 2-1 = 1$ et $v_0-u_0 > 0$. On en déduit que la suite (v_n-u_n) est positive.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n - u_n \geq 0.}$$

Soit n un entier naturel. Puisque $u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$, on a $u_n+1 \geq 2$ et $v_n+1 \geq 2$ puis $(u_n+1)(v_n+1) \geq 4$ et finalement $\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}$. Mais alors, puisque $v_n-u_n \geq 0$,

$$\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{4}(v_n-u_n).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n-u_n).}$$

d. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- Pour $n = 0$, on a $v_0 - u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$. Donc $v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$. Ainsi l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n-u_n) \leq \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.}$$

e. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (v_n-u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$.

En résumé, la suite (u_n) croît, la suite (v_n) décroît et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc convergentes et ont même limite.

$$\boxed{\text{Les deux suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers un même réel.}}$$

Puisque pour tout entier naturel n on a $u_n \geq 1$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on a encore $a \geq 1$.

Puisque pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on a encore $a = \dfrac{2a+1}{a+1}$. Or

$$a = \frac{2a+1}{a+1} \Leftrightarrow a(a+1) = 2a+1 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$. Cette équation admet donc deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Seul x_1 est un nombre supérieur ou égal à 1 et donc

$$\boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

EXERCICE 3

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-e^{-x}) = 2$. Comme $2 > 0$ et comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b. Soit x un réel positif.

$$f(x) - (2x-2) = (x-1)(2-e^{-x}) - (2x-2) = 2(x-1) - e^{-x}(x-1) - 2(x-1) = -e^{-x}(x-1) = (-x)e^{-x} + e^{-x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x)e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(2x-2)) = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = 2x-2 \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

c. Soit x un réel positif.
Soient M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x) - (2x-2) = -e^{-x}(x-1).$$

Puisque $e^{-x} > 0$, le signe de $y_M - y_N$ est le signe de $-(x-1)$ et donc

- si $0 \leq x < 1$, $y_M - y_N > 0$ ou encore $y_M > y_N$,
- si $x > 1$, $y_M - y_N < 0$ ou encore $y_M < y_N$,
- si $x = 1$, $y_M - y_N = 0$ ou encore $y_M = y_N = 2(1-1) = 0$.

On a montré que

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est strictement au-dessus de } \Delta \text{ sur } [0,1[\text{, strictement au-dessous sur }]1,+\infty[\text{ et } \mathscr{C} \text{ coupe } \Delta \text{ au point } (1,0).}$$

2. a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 1.(2-e^{-x}) + (x-1)e^{-x} = xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = xe^{-x} + 2(1-e^{-x}).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x}).}$$

b. Soit x un réel strictement positif. Alors $-x < 0$ puis $e^{-x} < e^{0}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ceci fournit $e^{-x} < 1$ et donc $2(1-e^{-x}) > 0$. D'autre part, $xe^{-x} > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } x,\ f'(x) > 0.}$$

c. $f'(0) = 0e^{-0} + 2(1-e^{-0}) = 0$. On en déduit que $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

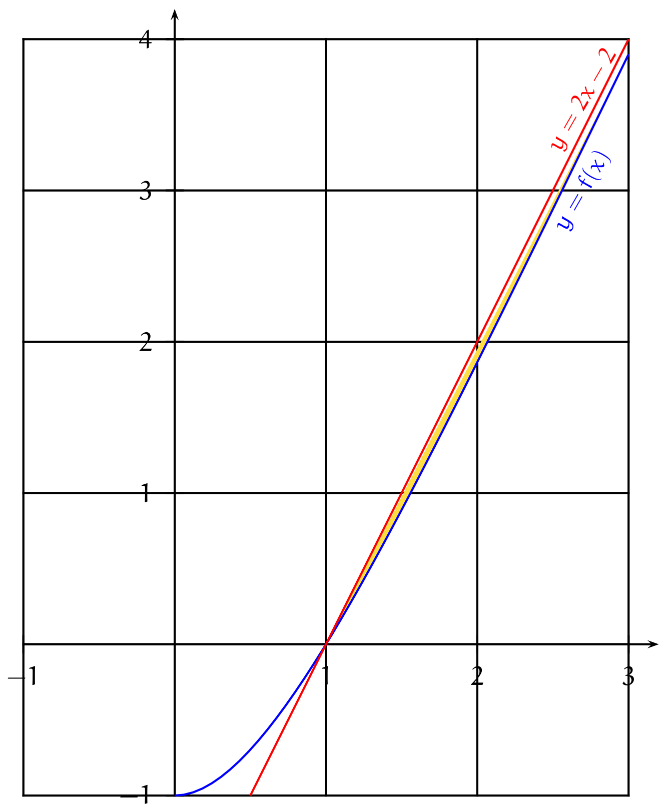
3. Notons $\mathscr{D}$ le domaine considéré et $\mathscr{A}$ son aire exprimée en cm^2.
D'après la question 1.c., la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ sur l'intervalle $[1;3]$. L'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire est donc égale à $\displaystyle\int_1^3 ((2x-2)-f(x))\,dx$ ou encore $\displaystyle\int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx$. Notons I cette intégrale et calculons I.

Pour x réel élément de $[1;3]$, posons $u(x) = x-1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1;3]$ et pour tout réel x de $[1;3]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx = \left[(x-1)(-e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 1.(-e^{-x})\,dx = -(3-1)e^{-3} + (1-1)e^{-1} - \int_1^3 (-e^{-x})\,dx \\ &= -2e^{-3} - \left[e^{-x}\right]_1^3 = -2e^{-3} - (e^{-3} - e^{-1}) = e^{-1} - 3e^{-3}.\end{aligned}$$

L'unité d'aire est égale à 4 cm^2 et donc

$$\boxed{\mathscr{A} = 4(e^{-1} - 3e^{-3})\ \text{cm}^2 \text{ ou encore } \mathscr{A} = 0,874\ldots\ \text{cm}^2.}$$



4. a. Soit x un réel positif et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x. La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en M est parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(x)$, le coefficient directeur de (T), est égal à 2, le coefficient directeur de Δ.

$$\begin{aligned}f'(x) = 2 &\Leftrightarrow xe^{-x} + 2(1-e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 2.\end{aligned}$$

Comme de plus $f(2) = (2-1)(2-e^{-2}) = 2 - e^{-2}$,

$$\boxed{A(2, 2-e^{-2}).}$$

b. Δ est la droite d'équation $-2x+y+2=0$ et A est le point de coordonnées $(2, 2-e^{-2})$. Donc la distance du point A à la droite Δ exprimée en unités de longueur vaut

$$\frac{|-2(2)+(2-e^{-2})+2|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}.$$

Comme l'unité de longueur est égale à 2 cm,

$$\boxed{d(A,\Delta) = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{5}} \text{ cm} = 0,121\ldots \text{cm}.}$$

EXERCICE 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On rappelle le théorème suivant : soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.
Ici, $B \neq A$ et $A \neq C$. Par suite, il existe une similitude directe et une seule transformant B en A et A en C.

b. Le rapport de S est

$$\frac{S(A)S(B)}{AB} = \frac{CA}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et l'angle de S est

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{S(A)S(B)}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \text{ entier relatif.}$$

$$\boxed{S \text{ est une similitude de rapport } k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et d'angle } \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \text{ entier relatif.}}$$

2. Puisque $S(A) = C \neq A$ et que $S(B) = A \neq B$, on a $\Omega \neq A$ et $\Omega \neq B$.
Puisque $\Omega = S(\Omega)$ et que $A = S(B)$, on a

$$\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{S(\Omega)S(B)}\right) = \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \text{ entier relatif.}$$

On en déduit que le triangle $A\Omega B$ est rectangle en Ω et donc que

$$\boxed{\Omega \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB].}$$

D'autre part, on sait que $S \circ S$ est une similitude d'angle $\theta + \theta = -\pi$. Donc, si Ω n'est pas le point C,

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{S \circ S(\Omega) S \circ S(B)}) = -\pi \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \text{ entier relatif.}$$

Mais alors, les points Ω, B et C sont alignés et donc

$$\boxed{\Omega \text{ appartient à la droite } (BC).}$$

On en déduit une construction du point Ω fournie à la fin du corrigé.

3. a. Comme à la question précédente

$$\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{S \circ S(\Omega) S \circ S(A)}\right) = -\pi \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \text{ entier relatif,}$$

et aussi

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{S \circ S(A) S \circ S(B)}\right) = -\pi \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \text{ entier relatif.}$$

$$\boxed{\text{Les points } A, \Omega \text{ et } D \text{ sont alignés et les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles.}}$$

Voir graphique à la fin du corrigé.

b. $CD = S(A)S(C) = kAC = kS(B)S(A) = k^2BA$ et donc

$$CD = 2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2.\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = 3+\sqrt{5}.$$

$$\boxed{CD = 3+\sqrt{5}.}$$

4. a. Puisque l'angle de S est $-\dfrac{\pi}{2}$, l'image par S d'une droite est une droite perpendiculaire.
Le point E est sur la droite (CD) et donc le point F est sur l'image par S de la droite (CD) qui est la droite passant par $S(C) = D$ et perpendiculaire à la droite (CD).

F appartient à la perpendiculaire à la droite (CD) passant par D.

D'autre part, on sait que par une similitude directe, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles. Or

- l'image par S de la droite (BE) est la droite $(S(B)S(E)) = (AF)$,
- l'image par S de la droite (AC) est la droite $(S(A)S(C)) = (CD)$,
- les droites (BE) et (AC) sont parallèles.

Donc, la droite (AF) est parallèle à la droite (CD).

F appartient à la parallèle à la droite (CD) passant par A.

Voir graphique à la fin.

b. Il résulte immédiatement de la construction précédente que

$\boxed{\text{le quadrilatère BFDE est un rectangle.}}$