

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f , définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1, +\infty[$.
- b. Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances :

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

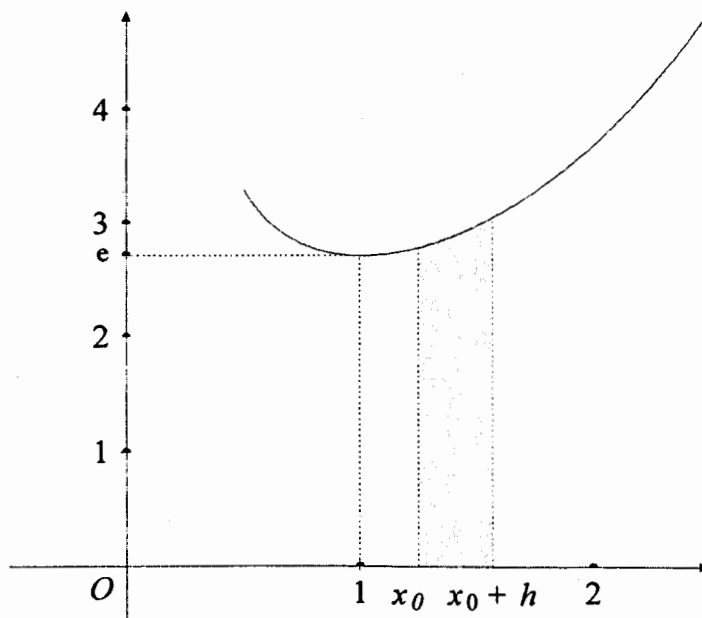
Pour tout réel x_0 de $[1, +\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1, +\infty[$ est une primitive de f .

- a. Que vaut $A(1)$?
- b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1, +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0+h).$$

- c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geq 1$?
- d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A .
- e. Conclure.



Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que:

$$z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' .

Déterminer les entiers y tels que $\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A , B et C de coordonnées respectives $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 4)$ et $(-1, 1, 1)$.

1. *a.* Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3, 4, -2)$.

Vérifier que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} .

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A , B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t .

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t .

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I .

Exprimer le vecteur \overline{IG} en fonction du vecteur \overline{IC} .

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C .

Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

- a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1, +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
- d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

- 3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
 - b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.