

EXERCICE 1

1. a. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto t$ sont continues sur $[1, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto t$ ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. f est donc continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$.

f est continue sur $[1, +\infty[$.

b. De même, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ et pour t réel supérieur ou égal à 1, on a

$$f'(t) = \frac{e^t \times t - e^t \times 1}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}.$$

Pour tout réel $t \geq 1$, on a $e^t > 0$, $t^2 > 0$ et $t - 1 \geq 0$. Par suite, la fonction f' est positive sur $[1, +\infty[$ et donc

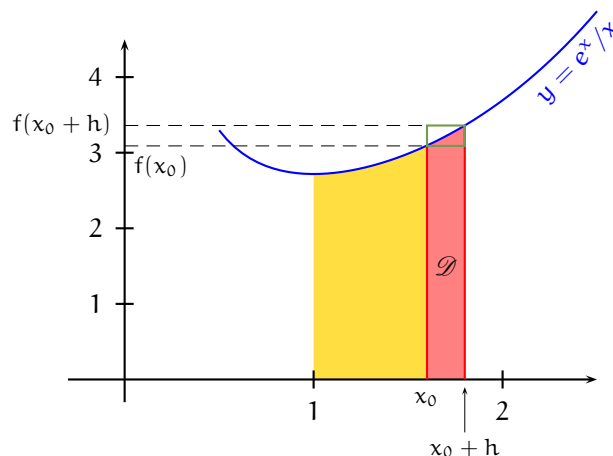
f est croissante sur $[1, +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances :

a. $A(1) = 0$.

b. Soient x_0 un réel de $[1, +\infty[$ et h un réel strictement positif.

$\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ est l'aire du domaine $\mathcal{D} = \{M(x, y) / x_0 \leq x \leq x_0 + h \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Puisque la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, l'aire de \mathcal{D} est supérieure ou égale à l'aire du rectangle de largeur $(x_0 + h) - x_0 = h$ et de longueur $f(x_0)$ et l'aire de \mathcal{D} est inférieure ou égale à l'aire du rectangle de largeur $(x_0 + h) - x_0 = h$ et de longueur $f(x_0 + h)$. Ceci fournit l'encadrement

$$hf(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq hf(x_0 + h).$$

et donc, puisque $h > 0$,

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

c. Si $x_0 > 1$ et $h < 0$ tel que $x_0 + h \geq 1$, on applique l'encadrement précédent à $x'_0 = x_0 + h$ et $h' = -h$. On a bien $x'_0 \geq 1$ et $h' > 0$. Comme $x'_0 + h' = x_0 + h - h = x_0$, l'encadrement

$$f(x'_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x'_0 + h') - \mathcal{A}(x'_0)}{h'} \leq f(x'_0 + h').$$

s'écrit alors

$$f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0).$$

ou encore

$$f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0).$$

d. Soit x_0 un réel strictement supérieur ou égal à 1.

D'après la question 1.a., f est continue en x_0 . Donc, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. L'encadrement du c. et le théorème des gendarmes montre que le rapport $\frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 par valeurs supérieures et que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0),$$

ce résultat restant valable quand $x_0 = 1$.

De même, l'encadrement du d. et le théorème des gendarmes montre que le rapport $\frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 par valeurs inférieures et que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0),$$

En résumé, si $x_0 > 1$, le rapport $\frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 et cette limite vaut $f(x_0)$ et si

$x_0 = 1$ le rapport $\frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 par valeurs supérieures et cette limite vaut $f(x_0)$.

A est donc dérivable en x_0 si $x_0 > 1$ et dérivable à droite en 1 et $A'(x_0) = f(x_0)$.

e. A est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $A' = f$. Donc

$$A \text{ est une primitive de } f \text{ sur l'intervalle } [1, +\infty[.$$

EXERCICE 2

Voir figure à la fin de l'exercice.

1.

$$z' = \frac{1}{5} ((3 + 4i)(x - iy) + (1 - 2i)) = \frac{1}{5} ((3x + 4y + 1) + i(4x - 3y - 2)).$$

Donc

$$\begin{cases} x' = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y' = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases}$$

2. a. Avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x + 4y + 1}{5} = x \\ \frac{4x - 3y - 2}{5} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 1 = 5x \\ 4x - 3y - 2 = 5y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -1 \\ 4x - 8y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 4y = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble des points invariants par f est la droite Δ d'équation $2x - 4y = 1$.

b. On sait qu'une transformation d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes, a étant non nul, est une similitude indirecte. On sait de plus que cette similitude est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$.

Ici, $|a| = \left| \frac{3 + 4i}{5} \right| = \frac{1}{5}|3 + 4i| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1$. Donc f est une isométrie indirecte. Enfin, d'après la question précédente, f admet une droite constituée de points invariants et on sait que

f est la symétrie axiale d'axe la droite Δ d'équation $2x - 4y = 1$.

3. Soit M un point du plan d'affixe z . Avec les notations de la question 1.,

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 3y - 2}{5} = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 2 = 0.$$

D est la droite d'équation $4x - 3y - 2 = 0$.

4. a. Puisque $4 \times 2 - 3 \times 2 = 8 - 6 = 2$, on peut prendre

$$(x_0, y_0) = (2, 2).$$

b. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $4x - 3y = 2$ (E).

On a alors $4x - 3y = 4x_0 - 3y_0$ et donc $4(x - x_0) = 3(y - y_0)$. L'entier 3 divise l'entier $3(y - y_0)$ et donc l'entier 3 doit diviser l'entier $4(x - x_0)$. Mais les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux et d'après le théorème de GAUSS, l'entier 3 divise l'entier $x - x_0$. Donc il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore $x = x_0 + 3k$.

De même, l'entier 4 divise l'entier $y - y_0$ et donc, il existe un entier relatif k' tel que $y = y_0 + 4k'$.

On vient de montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $(x, y) = (2 + 3k, 2 + 4k')$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $(x, y) = (2 + 3k, 2 + 4k')$. Alors

$$4x - 3y = 2 \Leftrightarrow 4(2 + 3k) - 3(2 + 4k') = 2 \Leftrightarrow 12(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $4x - 3y = 2$ sont les couples de la forme $(2 + 3k, 2 + 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Si $x = 1$, $x' = \frac{4(y+1)}{5}$ et $y' = \frac{2-3y}{5}$. x' et y' sont des entiers relatifs si et seulement si 5 divise $4(y+1)$ et $2-3y$. Comme 4 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $4(y+1)$ si et seulement si 5 divise $y+1$.

En résumé, on cherche les entiers relatifs y tels que 5 divise $y+1$ et $2-3y$.

Maintenant, 5 divise $y+1$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $y+1 = 5k$ ou encore $y = -1 + 5k$. Pour un tel y , on a

$$2 - 3y = 2 - 3(-1 + 5k) = 5 - 3 \times (5k) = 5(1 - 3k),$$

ce qui montre que l'entier $2 - 3y$ est divisible par 5.

Les entiers relatifs y tels que x' et y' soient des entiers relatifs sont les entiers de la forme $-1 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 3

1. a. Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(0, 1, 2)$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-2, 1, -1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc

les points A, B et C ne sont pas alignés.

Ainsi, les points A, B et C définissent un plan.

b. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times 3 + 1 \times 4 + (-1) \times (-2) = -6 + 4 + 2 = 0$. Donc

le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Puisque le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) . Le plan (ABC) est donc le plan passant par A de vecteur normal \vec{n} . Une équation cartésienne de ce plan est

$$3(x - 1) + 4(y - 0) - 2(z - 2) = 0,$$

ou encore

$$(ABC) : 3x + 4y - 2z + 1 = 0.$$

2. a. Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\vec{n}_1(2, 1, 2)$. Un vecteur normal au plan P_2 est le vecteur $\vec{n}_2(1, -2, 6)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles. On sait alors que

les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D.

Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite D.

Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z) .

$$\begin{aligned} M \in P_1 \cap P_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 2z - 1 \\ x - 2(-2x - 2z - 1) + 6z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 2z - 1 \\ 5x + 10z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - \frac{2}{5} \\ y = -2\left(-2z - \frac{2}{5}\right) - 2z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2z \\ y = -\frac{1}{5} + 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2k \\ y = -\frac{1}{5} + 2k \\ z = k \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Un système d'équations paramétriques de la droite D est } \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2k \\ y = -\frac{1}{5} + 2k \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

b. Dans le système précédent, on lit les coordonnées d'un vecteur directeur de D : le vecteur $\vec{u}(-2, 2, 1)$ est un vecteur directeur de D.

On a $\vec{u} \cdot \vec{n} = (-2) \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) = -6 + 8 - 2 = 0$. Le vecteur \vec{u} est orthogonal au vecteur \vec{n} et on sait alors que

la droite D et le plan (ABC) sont parallèles.

3. a. Soit t un réel positif. La somme des coefficients de A, B et C vaut $3 + t$ et est strictement positive. En particulier, cette somme n'est pas nulle et donc G existe.

Les coordonnées de I sont $\left(\frac{x_A + 2x_B}{3}, \frac{y_A + 2y_B}{3}, \frac{z_A + 2z_B}{3}\right)$ ou encore $\left(\frac{1+2}{3}, \frac{0+2}{3}, \frac{2+8}{3}\right)$ et donc

$$I\left(1, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$G = \text{bar}\{A(1), B(2), C(t)\} = \text{bar}\{I(3), C(t)\}.$$

On sait alors que pour tout point M de l'espace, on a

$$3\overrightarrow{MI} + t\overrightarrow{MC} = (t+3)\overrightarrow{MG}.$$

Quand $M = I$, on obtient en particulier $t\overrightarrow{IC} = (t+3)\overrightarrow{IG}$ et donc

$$\overrightarrow{IG} = \frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}.$$

b. Pour t réel positif ou nul, posons $f(t) = \frac{t}{t+3}$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t ,

$$f'(t) = \frac{1 \times (t+3) - t \times 1}{(t+3)^2} = \frac{3}{(t+3)^2}.$$

f' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $f(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{t}} = 1$. On en déduit que quand t décrit l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t)$ décrit l'intervalle $[0, 1[$. Enfin, puisque pour tout réel positif t , on a $\overrightarrow{IG} = f(t)\overrightarrow{IC}$,

lorsque t décrit $[0, +\infty[$, le point G décrit le segment $[IC]$ privé du point C .

Le point G est le point J si et seulement si le coefficient $\frac{t}{t+3}$ est égal à $\frac{1}{2}$. Or

$$\frac{t}{t+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = t+3 \Leftrightarrow t = 3.$$

Le point G est le point J si et seulement si $t = 3$.

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0,95 \frac{n^{10}}{2^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \leq 0,95 \frac{2^{n+1}}{2^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \leq 0,95 \times 2 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

On a montré que

pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ si et seulement si $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

2. a. f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$, $f'(x) = 10 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^9 = -\frac{10}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^9$. f' est strictement négative sur $[1, +\infty[$ et donc

f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et donc $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ tend vers $(1+0)^{10}$ c'est-à-dire 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

b. f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1, +\infty[$. Or $f(1) = 2^{10} = 1024$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 1,9 < f(1)$ et l'équation $f(x) = 1,9$ admet une et une seule solution notée α dans $[1, +\infty[$.

Il existe un réel α et un seul dans l'intervalle $[1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Puisque f est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et que $n-1$, α et n sont dans cet intervalle,

$$\begin{aligned} n-1 \leq \alpha \leq n &\Leftrightarrow f(n) \leq f(\alpha) \leq f(n-1) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{10} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \sqrt[10]{1,9} \leq 1 + \frac{1}{n-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \sqrt[10]{1,9} - 1 \leq \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow n-1 \leq \frac{1}{\sqrt[10]{1,9} - 1} \leq n (*). \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{\sqrt[10]{1,9} - 1} = 15,08\dots$ et donc, puisque n est un entier, l'encadrement (*) équivaut à $n = 16$.

$$n_0 = 16.$$

d. Soit n un entier naturel non nul. De nouveau, f étant décroissante sur $[1, +\infty[$, si $n \geq 16 \geq \alpha$, on a $f(n) \leq f(16) \leq f(\alpha)$ ce qui s'écrit $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 16, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

3. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 16. D'après la question précédente, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$. D'après la question 1., on a encore $u_{n+1} \leq 0,95u_n$. Mais u_n est un réel strictement positif et donc, puisque $0,95 < 1$, on a $0,95u_n < u_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 16, on a $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 16.

b. La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et est minorée par 0. On en déduit que

la suite (u_n) converge.

4. La suite (u_n) est positive.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$.

- Quand $n = 16$, on a $0,95^{n-16}u_{16} = 0,95^0u_{16} = u_{16}$ et on a bien $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 16$.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 16. Supposons que $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$. Alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} &\leq 0,95u_n \text{ (d'après la question 1.)} \\ &\leq 0,95 \cdot 0,95^{n-16}u_{16} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 0,95^{(n+1)-16}u_{16}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$.

Comme $|0,95| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^{n-16}u_{16} = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$