BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT de SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (5 points)

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique : **4 cm**

PARTIE I

1) Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_I = 1,\ z_J = i,\ z_H = 1 + i,\ z_A = 2,\ z_B = \frac{3}{2} + i,\ z_C = 2i \text{ et } z_D = -1.$$

2) Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \dfrac{1}{2}i$.

3) Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

PARTIE II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe : $z' = -i\overline{z} + 2i$.

1) Déterminer les images des points O, A, B par f.

2) **a)** Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4) On pose $s = f \circ t^{-1}$.

a) Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -i\overline{z} + 1 + i$.

b) Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

c) En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1) **a)** Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq v_n \leq 1.$$

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4) Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes****.*
La partie ***I*** *est la démonstration d'un résultat de cours. La partie* ***II*** *est un Q.C.M.*

PARTIE I

Question de cours

Soient A et B deux événements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 1/2 point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie ***II*** *est ramenée à zéro.*

1) Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.
On extrait simultanément trois boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

A $\frac{75}{512}$ **B** $\frac{13}{56}$ **C** $\frac{15}{64}$ **D** $\frac{15}{28}$

2) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers de la population.
Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est $0,25$.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

A $\frac{1}{120}$ **B** $\frac{3}{40}$ **C** $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{4}{30}$

3) Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans tous les autres cas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

A 2 **B** 13 **C** 16 **D** 17

4) La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/6$.
On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$ (avec $\lambda = 1/6$) où t désigne le temps exprimé en minutes.
Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes ?

A $0,2819$ **B** $0,3935$ **C** $0,5654$ **D** $0,6065$

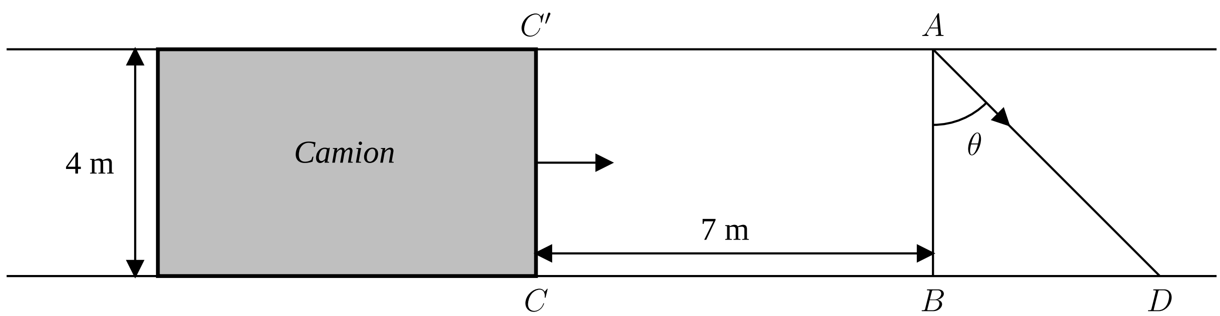
EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire ... 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2) On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3) Conclure.

<u>*Rappel*</u> : La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$.