BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

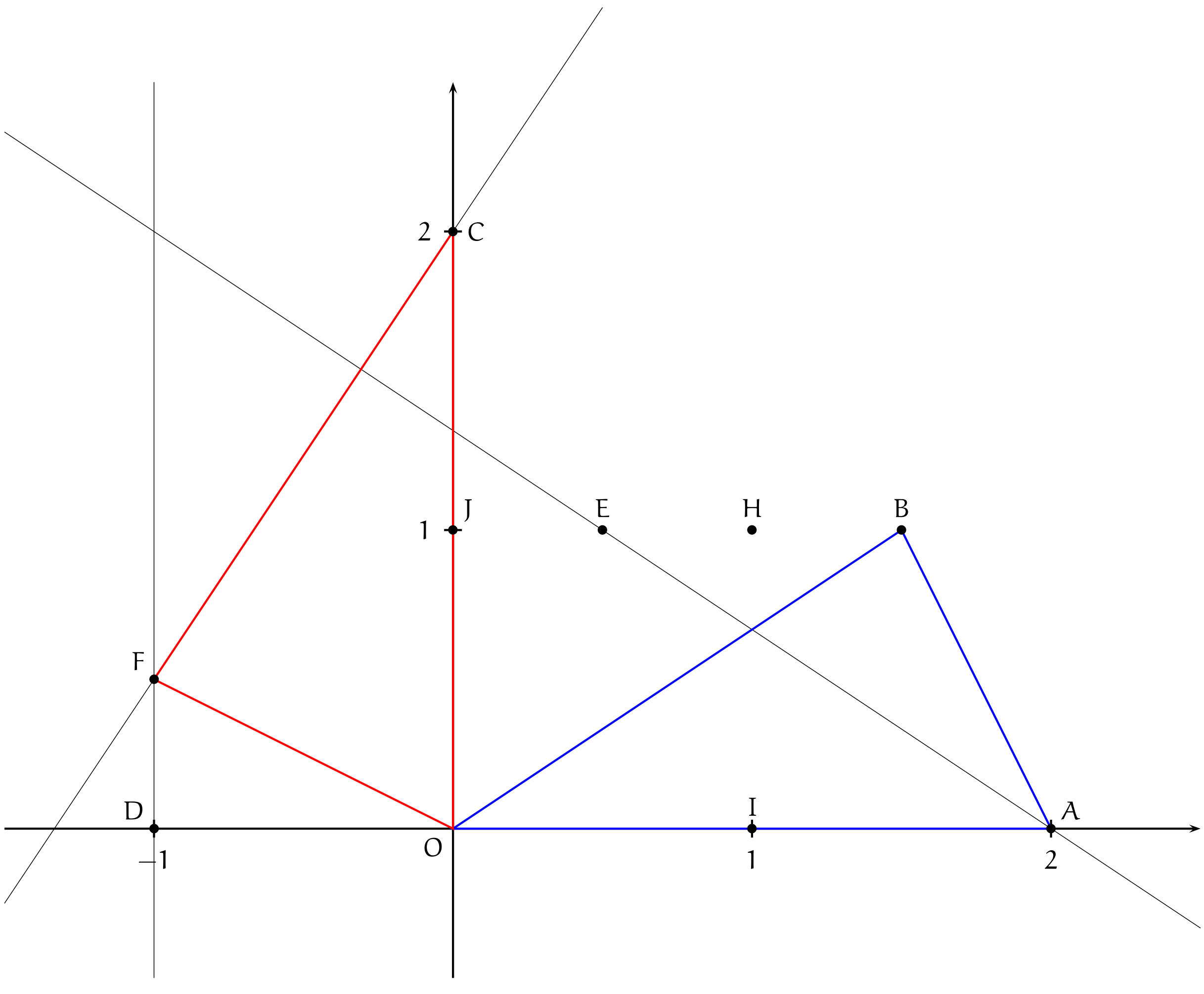
- Série S -

Enseignement de Spécialité

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie I
1°)



2°) H est le milieu du segment [EB] et donc $z_H = \dfrac{z_E + z_B}{2}$. Par suite, $z_E = 2z_H - z_B = 2(1+i) - (\dfrac{3}{2} + i) = \dfrac{1}{2} + i$ et donc

$$\boxed{E(\frac{1}{2}, 1) \text{ ou encore } z_E = \frac{1}{2} + i.}$$

La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{AE}(-1,5;1)$ passant par $C(0,2)$. Une équation cartésienne de cette droite est $-1,5(x-0) + 1(y-2) = 0$ ou encore $y = 1,5x + 2$.

D'autre part, une équation de la parallèle à (OC) passant par D est $x = -1$. Par suite, $x_F = -1$ et $y_F = 1,5(-1)+2 = 0,5$.

$$\boxed{F(-1, \frac{1}{2}) \text{ ou encore } z_F = -1 + \frac{1}{2}i.}$$

3°) • $OA = |z_A| = |2| = 2$ et $OC = |z_C| = |2i| = 2$. Donc $OA = CO$.

• $AB = |z_B - z_A| = |\frac{3}{2} + i - 2| = |-\frac{1}{2} + i| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $OF = |z_F| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Donc $AB = OF$.

• $OB = |z_B| = |\frac{3}{2}+i| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ et $CF = |z_F - z_C| = |2i-(-1+\frac{1}{2}i)| = |1+\frac{3}{2}i| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Donc $OB = CF$.

$$\boxed{\text{les triangles } OAB \text{ et } OCF \text{ sont isométriques.}}$$

Partie II

1°) Si $z = 0$, $z' = 2i = z_C$. Donc $f(O) = C$. Si $z = z_A = 2$, $z' = -2i + 2i = 0$. Donc $f(A) = O$. Enfin, si $z = z_B = \frac{3}{2} + i$, $z' = -i\left(\frac{3}{2} - i\right) + 2i = -1 + \frac{1}{2}i$ et $f(B) = F$.

$$\boxed{f(O) = C,\ f(A) = O \text{ et } f(B) = F.}$$

2°) **a)** On sait que les similitudes indirectes sont les transformations d'expression complexe $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes, a étant non nul. On sait de plus qu'une telle transformation est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$.
Ici, $a = -i$ et donc $|a| = 1$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est une similitude indirecte et même une isométrie indirecte.}}$$

b) Soit M un point du plan On note z son affixe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow -i\overline{z} + 2i = z \Leftrightarrow -i(x - iy) + 2i = x + iy \\ &\Leftrightarrow (x + y) + i(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ et } x + y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations ne peuvent être vérifiées simultanément et donc

$$\boxed{f \text{ n'a pas de point invariant.}}$$

c) On sait qu'une symétrie axiale admet une droite de points invariants. Comme f n'admet pas de point invariant

$$\boxed{f \text{ n'est pas une symétrie axiale.}}$$

3°) On sait que l'expression complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b est $z' = z+b$ puis que t^{-1} est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$ d'affixe $-b$ et donc que l'expression complexe de t^{-1} est $z' = z - b$.
Ici, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IJ}(-1, 1)$ ou encore $b = -1 + i$ et donc

$$\boxed{\text{l'expression complexe de } t \text{ est } z' = z - 1 + i \text{ et celle de } t^{-1} \text{ est } z' = z + 1 - i.}$$

4°) **a)** Soit M un point du plan. On pose $M' = t^{-1}(M)$ puis $M'' = f(M')$ de sorte que $M'' = f(t^{-1}(M)) = s(M)$. Notons z, z' et z'' les affixes respectives de M, M' et M''. On a alors

$$z'' = -i\overline{z'} + 2i = -i\overline{z + 1 - i} + 2i = -i(\overline{z} + 1 + i) + 2i = -i\overline{z} - i + 1 + 2i = -i\overline{z} + 1 + i.$$

Ainsi, l'affixe du point $s(M)$ est $-i\bar{z}+1+i$ et donc

$$\boxed{\text{l'expression complexe de } s \text{ est } z' = -i\bar{z}+1+i.}$$

b) Comme à la question 2°)a), le cours montre que s est une isométrie indirecte.

Montrons alors que les points I et J sont invariants par s.
- Si $z = z_I = 1$, alors $z' = -i.1+1+i = 1 = z_I$;
- Si $z = z_J = i$, alors $z' = -i.(-i)+1+i = i = z_J$.

Donc $s(I) = I$ et $s(J) = J$.
On sait qu'une isométrie indirecte admettant deux points invariants est une symétrie axiale et que ces points invariants appartiennent à son axe. Puisque $I \neq J$, s est la symétrie par rapport à la droite (IJ).

$$\boxed{s \text{ est la symétrie par rapport à la droite } (IJ).}$$

c) Puisque $s = f \circ t^{-1}$, on a encore $s \circ t = f \circ t^{-1} \circ t = f \circ Id = f$. Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c} f = s \circ t \text{ où } t \text{ est la translation de vecteur } \overrightarrow{IJ}(-1,1) \text{ et} \\ s \text{ est la symétrie par rapport à la droite } (IJ) \text{ d'équation } x+y=1. \end{array}}$$

EXERCICE 2

1°) **a)** $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. $u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. $u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22+3}{12} = \frac{25}{12}$.

$$\boxed{u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{11}{6} \text{ et } u_4 = \frac{25}{12}.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Quand $n = 1$, on a $u_1 = 1 = \frac{1}{1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = 1 + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

2°) **a)** Soit k un entier naturel non nul. L'intervalle $[k, k+1]$ est contenu dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. On en déduit que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [k, k+1], \text{ on a } \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale on a alors

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx.$$

Enfin $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1}$ et $\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } k,\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}.}$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. D'après la question a), on a

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} & \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx & \leq 1 \\
\frac{1}{3} & \leq \int_2^3 \frac{1}{x}\, dx & \leq \frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{n-1} & \leq \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx & \leq \frac{1}{n-2}. \\
\frac{1}{n} & \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\, dx & \leq \frac{1}{n-1}.
\end{array}$$

On additionne membre à membre ces encadrements. On obtient

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leq\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\,dx\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}.$$

Le premier membre de cet encadrement s'écrit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-1$ et vaut u_n-1. Le dernier membre de cet encadrement s'écrit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$ et vaut $u_n-\frac{1}{n}$. Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\,dx=\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\ln(n).$$

On a montré que

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n-1\leq\ln(n)\leq u_n-\frac{1}{n}$.

Soit de nouveau n un entier supérieur ou égal à 2. L'encadrement précédent se réécrit successivement $u_n-1\leq\ln(n)$ et $\ln(n)\leq u_n-\frac{1}{n}$ puis $u_n-\ln(n)\leq 1$ et $\frac{1}{n}\leq u_n-\ln(n)$ ou encore $v_n\leq 1$ et $\frac{1}{n}\leq v_n$ ou enfin $\frac{1}{n}\leq v_n\leq 1$. Comme $\frac{1}{n}\geq 0$, on a montré que

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0\leq v_n\leq 1$.

On note que cet encadrement reste vrai pour $n=1$ car $v_1=1-\ln 2\in[0,1]$.

3°) **a)** Soit n un entier naturel non nul. Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}$ et donc

$$v_{n+1}-v_n=(u_{n+1}-u_n)-(\ln(n+1)-\ln(n))=\frac{1}{n+1}-[\ln(x)]_n^{n+1}=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx.$$

Pour tout entier naturel non nul, $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$.

b) D'après la question 2°)a), si n est un entier supérieur ou égal à 1, on a $\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$ et donc $\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\leq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $v_{n+1}-v_n\leq 0$ et donc

la suite (v_n) est décroissante.

4°) D'après la question précédente la suite (v_n) est décroissante et d'après la question 2°)b) la suite (v_n) est minorée par le réel 0. On sait alors que

la suite (v_n) converge.

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n=\ln(n)+v_n$. Or quand n tend vers $+\infty$, $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ et v_n tend vers γ. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$$

EXERCICE 3

PARTIE I

Question de cours

A et B sont indépendants et donc $p_A(B) = p(B)$ ou aussi $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A)p(B) + p(A \cap \overline{B}).$$

Par suite,

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(\overline{B}).$$

Ainsi, $p(A \cap \overline{B}) = p(A)p(\overline{B})$ ou encore $p_A(\overline{B}) = p(\overline{B})$ et on a montré que les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

PARTIE II

1°)	**D**
2°)	**B**
3°)	**B**
4°)	**B**

Explications.

1°) Le nombre de tirages simultanés de trois boules parmi $5 + 3 = 8$ est $\binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$. Parmi ces 56 tirages possibles, il y a $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1}$ tirages contenant deux boules noires et une boule rouge avec $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = \dfrac{5 \times 4}{2} \times 3 = 30$.
La probabilité cherchée est donc

$$\frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

2°) On choisit un individu au hasard et on note V l'événement « l'individu a été vacciné » et G l'événement « l'individu a contracté la grippe ».
L'énoncé fournit $p(V) = \dfrac{1}{3}$, $p(G) = 0,25 = \dfrac{1}{4}$ et $p_G(V) = \dfrac{1}{10}$.
La probabilité demandée est $p_V(G)$.

$$p_V(G) = \frac{p(G \cap V)}{p(V)} = \frac{p(G) \times p_G(V)}{p(V)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10}}{\dfrac{1}{3}} = \frac{3}{40}.$$

3°) X prend les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 10$. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	10
$p(X = x_i)$	$1/2$	$1/3$	$1/6$

Calculons l'espérance de X.

$$E(X) = p(X = x_1)x_1 + p(X = x_2)x_2 + p(X = x_3)x_3 = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Calculons la variance de X.

$$\begin{aligned} V(X) &= p(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + p(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + p(X = x_3)(x_3 - E(X))^2 = \frac{1}{2}(0-2)^2 + \frac{1}{3}(1-2)^2 + \frac{1}{6}(10-2)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{3} + \frac{32}{3} = 2 + 11 = 13. \end{aligned}$$

4°) Soit t un réel positif. $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-t/6}$. La probabilité demandée est $p_{T\geq 2}(T<5)$.

$$\begin{aligned}
p_{T\geq 2}(T<5) &= \frac{p((T<5)\cap(T\geq 2))}{p(T\geq 2)} = \frac{p(T<5)-p(T<2)}{1-p(T<2)} = \frac{(1-e^{-5/6})-(1-e^{-2/6})}{e^{-2/6}} \\
&= \frac{e^{-2/6}-e^{-5/6}}{e^{-2/6}} = 1-e^{-5/6+2/6} = 1-e^{-1/2} = 0,39346\ldots \\
&= 0,3935 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1°) $AD = \dfrac{AB}{\cos(\theta)} = \dfrac{4}{\cos(\theta)}$ et $CD = CB + BD = CB + AB\tan(\theta) = 7 + 4\tan(\theta)$.

$$AD = \frac{4}{\cos(\theta)} \text{ m et } CD = 7 + 4\tan(\theta) \text{ m.}$$

La vitesse du camion est égale à 1000 m/min et celle du lapin à 500 m/min. Durant un laps de temps de t min, le lapin parcourt $500t$ m et le camion $1000t$ m. Or $500t = AD \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{500} \times \dfrac{4}{\cos(\theta)}$ et $1000t = CD \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{1000}(7 + 4\tan(\theta))$. Donc

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{125\cos(\theta)} \text{ min et } t_2 = \frac{7 + 4\tan(\theta)}{1000} \text{ min.}}$$

2°) Le lapin traverse la route sans encombre si et seulement si $t_1 < t_2$. Or

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \frac{1}{125\cos(\theta)} < \frac{7+4\tan(\theta)}{1000} \Leftrightarrow \frac{8}{\cos(\theta)} < 7 + 4\tan(\theta) \Leftrightarrow 7 + 4\tan(\theta) - \frac{8}{\cos(\theta)} > 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} + 2\tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)} > 0.$$

$$\boxed{\text{Le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si } f(\theta) > 0).}$$

3°) La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ et ne s'annule pas sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. Donc la fonction $\theta \mapsto -\dfrac{4}{\cos\theta}$ est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. Par suite, f est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout réel $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - 4\frac{-(-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)} = \frac{2(1 - 2\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}.$$

Sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$, $f'(\theta)$ est du signe de $1 - 2\sin(\theta)$ et donc f' est strictement positive sur $[0, \dfrac{\pi}{6}[$, strictement négative sur $]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}[$ et s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$. f admet donc un maximum en $\dfrac{\pi}{6}$. De plus

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}/2} = \frac{7}{2} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 0,03\ldots > 0$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{si } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ le lapin s'en sort.}}$$

