BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2005
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
France métropolitaine

EXERCICE 1

Partie A : question de cours

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.

Puisque la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n on a $u_0 \leq u_n$. On en déduit que pour tout entier naturel n on a $v_n \geq u_0$. Ainsi, la suite (v_n) est décroissante et minorée par le réel u_0. Donc

la suite (v_n) est convergente.

Pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = (u_n - v_n) + v_n.$$

La suite (u_n) est donc convergente en tant que somme de deux suites convergentes et de plus, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) + \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

On a montré que

$\boxed{\text{Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.}}$

Partie B

1) Faux

2) Vrai

3) Faux

4) Faux

Démonstrations.

1) Pour tout entier naturel n, posons $u_n = \dfrac{-2}{n+1}$. La suite (u_n) est convergente de limite nulle. De plus, aucun terme de la suite (u_n) n'est nul et pour tout entier naturel n on a $v_n = n + 1$. Quand n tend vers $+\infty$, v_n tend vers $+\infty$ et en particulier la suite (v_n) n'est pas convergente.

On a fourni un exemple de suite (u_n) dont aucun terme n'est nul telle que la suite (u_n) soit convergente et la suite (v_n) ne soit pas convergente.

2) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_n \geq 2 &\Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{(par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Rightarrow \frac{2}{u_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{-2}{u_n} \geq -1 \\ &\Rightarrow v_n \geq -1. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc minorée par -1.

3) Pour tout entier naturel, posons $u_n = -(n+1)$. Aucun terme de la suite (u_n) n'est nul et d'autre part, la suite (u_n) est décroissante. Maintenant, pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{2}{n+1}$. La suite (v_n) est une suite strictement décroissante et n'est donc pas une suite croissante.

On a fourni un exemple de suite (u_n) dont aucun terme n'est nul telle que la suite (u_n) soit décroissante et la suite (v_n) ne soit pas croissante.

4) Pour tout entier naturel, posons $u_n = (-1)^n$. Aucun terme de la suite (u_n) n'est nul et d'autre part, la suite (u_n) est divergente. Pour tout entier naturel, on a $v_n = \dfrac{-2}{(-1)^n} = -2(-1)^n$. La suite (v_n) est donc également divergente.

On a fourni un exemple de suite (u_n) dont aucun terme n'est nul telle que la suite (u_n) soit divergente et la suite (v_n) ne converge pas vers 0.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) Le rapport de f est $k = \dfrac{MR}{MN}$. Puisque le triangle MRN est isocèle rectangle de sommet R, on sait que $MN = \sqrt{2}MR$ et donc $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
L'angle de f est l'angle $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MR})$ c'est-à-dire $-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\boxed{f \text{ est la similitude de centre } M, \text{ de rapport } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{4}.}$$

b) L'expression complexe de f est

$$z' = m + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}(z - m).$$

Or, pour tout nombre complexe z, on a

$$\begin{aligned} m + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}(z-m) &= m + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(z-m) = m + \frac{1}{2}(1-i)(z-m) \\ &= \frac{1-i}{2}z + \left(1 - \frac{1-i}{2}\right)m \\ &= \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}z. \end{aligned}$$

Puisque $f(N) = R$, on a donc

$$\boxed{r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n.}$$

2) Notons G l'isobarycentre de (M, N, P, Q) et G' l'isobarycentre de (R, S, T, U). Notons g et g' les affixes respectives des points G et G'.

$$\begin{aligned} g' = \frac{1}{4}(r+s+t+u) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n + \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p + \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q + \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m\right) \\ &= \frac{1}{4}(m+n+p+q) = g. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\text{les quadruplets } (M, N, P, Q) \text{ et } (R, S, T, U) \text{ ont même isobarycentre.}}$$

3) a) On a

$$u - s = \left(\frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m\right) - \left(\frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p\right) = \frac{1+i}{2}(q-n) + \frac{1-i}{2}(m-p),$$

et

$$i(t-r) = i\left[\left(\frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q\right) - \left(\frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n\right)\right] = i\left[\frac{1+i}{2}(p-m) + \frac{1-i}{2}(q-n)\right] = \frac{1+i}{2}(q-n) + \frac{1-i}{2}(m-p).$$

Donc

$$\boxed{u - s = i(t-r).}$$

b) En passant aux modules, on obtient

$$\mathsf{SU} = |u - s| = |i|.|t - r| = \mathsf{RT}$$

et en passant aux arguments, on obtient

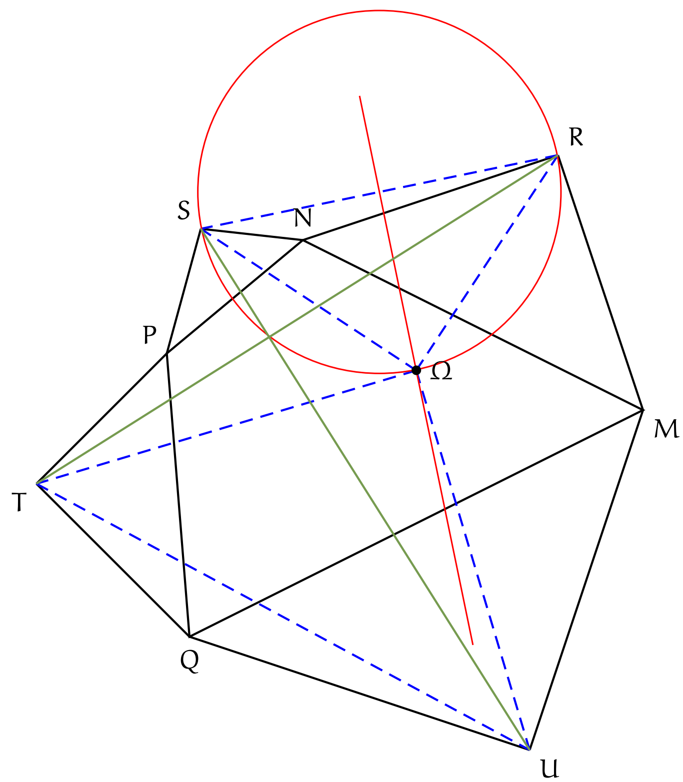
$$(\overrightarrow{\mathsf{RT}}, \overrightarrow{\mathsf{SU}}) = \arg\left(\frac{u - s}{t - r}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi).$$

$$\boxed{\text{les segments } [\mathsf{RT}] \text{ et } [\mathsf{SU}] \text{ ont même longueur et les droites } (\mathsf{RT}) \text{ et } \mathsf{SU}) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

Partie B

1) Puisque $\mathsf{R} \neq \mathsf{T}$, que $\mathsf{RT} = \mathsf{US}$ et que l'angle $(\overrightarrow{\mathsf{RT}}, \overrightarrow{\mathsf{US}})$ vaut $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π et n'est donc pas nul modulo 2π, on sait qu'il existe une rotation g et une seule telle que $g(\mathsf{R}) = \mathsf{S}$ et $g(\mathsf{T}) = \mathsf{U}$. L'angle de g est l'angle $(\overrightarrow{\mathsf{RT}}, \overrightarrow{\mathsf{US}})$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

2) Le centre de g est le point Ω tel que le triangle $\mathsf{R}\Omega\mathsf{S}$ soit isocèle rectangle de sens direct. Ω est sur la médiatrice du segment $[\mathsf{RS}]$, sur le cercle de diamètre $[\mathsf{RS}]$ tel que $(\overrightarrow{\Omega\mathsf{R}}, \overrightarrow{\Omega\mathsf{S}}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.



EXERCICE 3

1) a) Le nombre de cas possibles est le nombre de tirages simultanés de 3 parmi 13. Il y en a $\binom{13}{3}$ avec

$$\binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 13 \times 2 \times 11 = 286.$$

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq 3$. Le nombre de cas favorables à l'événement « $X = k$ » est le nombre de tirages simultanés de k boules parmi les 10 rouges et de $3 - k$ parmi les 3 vertes. Il y en a

$$\binom{10}{k} \times \binom{3}{3-k}.$$

Ainsi,

- $p(X = 0) = \dfrac{\binom{10}{0} \times \binom{3}{3}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{1}{286}$.
- $p(X = 1) = \dfrac{\binom{10}{1} \times \binom{3}{2}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{10 \times 3}{286} = \dfrac{30}{286}$.
- $p(X = 2) = \dfrac{\binom{10}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{45 \times 3}{286} = \dfrac{135}{286}$.
- $p(X = 3) = \dfrac{\binom{10}{3} \times \binom{3}{0}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{120}{286}$.

Résumons ces résultats dans un tableau.

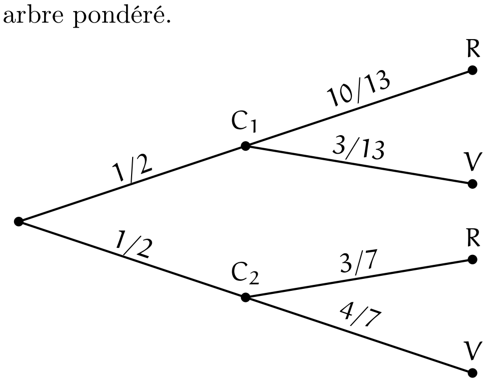
k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$

b)

$$E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 3 \times p(X = 3) = \frac{30}{286} + \frac{270}{286} + \frac{360}{286} = \frac{660}{286} = \frac{30}{13} = 2,307\ldots$$

$$\boxed{E(X) = \frac{30}{13} = 2,307 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

2) a) Représentons la situation par un arbre pondéré.



b) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(R) = p(R \cap C_1) + p(R \cap C_2) = P(C_1) \times p_{C_1}(R) + P(C_2) \times p_{C_2}(R) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{13} + \frac{3}{14} = \frac{109}{182}.$$

$$\boxed{p(R) = \frac{109}{182} = 0,598 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

c) La probabilité demandée est $p_R(C_1)$. Or

$$p_R(C_1) = \frac{p(R \cap C_1)}{p(R)} = \frac{p(C_1) \times p_{C_1}(R)}{p(R)} = \frac{(1/2) \times (10/13)}{109/182} = \frac{10 \times 182}{2 \times 13 \times 109} = \frac{10 \times 7}{109} = \frac{70}{109}.$$

$$\boxed{p_R(C_1) = \frac{70}{109} = 0,642 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

3) a) L'événement contraire de l'événement « l'enfant a pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix » est « l'enfant n'a pris aucune bille rouge au cours de ses n choix ». Puisque l'enfant remet à chaque fois la bille tirée à sa place, à chaque choix, la probabilité que l'enfant ne prenne pas une bille rouge est $1 - p(R)$ ou encore $1 - \frac{109}{182}$ ou enfin $\frac{73}{182}$.

Puisque l'enfant remet à chaque fois la bille tirée à sa place, les n tirages sont indépendants et la probabilité que l'enfant n'ait pris aucune bille rouge au cours de ses n choix est $\left(\frac{73}{182}\right)^n$. La probabilité cherchée est donc

$$\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq \frac{99}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{182}{73}\right)^n \geq 100 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{182}{73}\right)^n\right) \geq \ln(100) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{182}{73}\right) \geq \ln(100) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{182}{73}\right)} \text{ (car } \ln\left(\frac{182}{73}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geq 5,04\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geq 6.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le plus petit entier } n \text{ tel que } p_n \geq 0,99 \text{ est } 6.}$$

EXERCICE 4

Partie A

a) Soit x un réel. $e^{x/4}$ n'est pas nul. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \frac{e^{x/4}\times 3}{e^{x/4}\times(2e^{-x/4}+1)} = \frac{3}{1+2e^{-x/4}}.$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}.}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}} = \dfrac{3}{1+2\times 0} = 3$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \dfrac{3\times 0}{2+0} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 3\times\frac{-(1+2e^{-\frac{x}{4}})'}{(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3\times(-2)\times(-\frac{1}{4})e^{-\frac{x}{4}}}{(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{2(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2}.$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) a) On sait que les solutions de (E_1) sont les fonctions $t\mapsto C.e^{\frac{t}{4}}$ où C est une constante réelle.

b) Pour tout réel t, on a $g(t) = C.e^{\frac{t}{4}}$. Par suite,

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow C.e^0 = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\boxed{\text{La solution de } (E_1) \text{ prenant la valeur } 1 \text{ en } 0 \text{ est la fonction } g\ :\ t\mapsto e^{\frac{t}{4}}.}$$

c) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} g(t)\geq 3 &\Leftrightarrow e^{\frac{t}{4}}\geq 3\\ &\Leftrightarrow \frac{t}{4}\geq \ln(3) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow t\geq 4\ln(3) \end{aligned}$$

Or $4\ln(3) = 4,3\ldots$. Donc la première valeur entière de t à partir de laquelle $g(t)$ est supérieur ou égal à 3 est 5. Donc

$$\boxed{\text{la population de rongeurs dépassera les 300 rongeurs pour la première fois au bout de 5 ans,}}$$

(plus précisément au bout de 4 ans, 4 mois et 23 jours.)

2) a) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur $[0, +\infty[$. La fonction $h = \dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel positif t on a

$$u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{u(t)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -h'(t) = \frac{1}{4}h(t) - \frac{1}{12} \Leftrightarrow h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

De plus, $h(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{u(0)} = 1 \Leftrightarrow u(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ satisfait aux conditions } (E_2) \text{ si et seulement si la fonction } h \text{ satisfait aux conditions } (E_3).}$$

b) Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{at} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle. Ici $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{1}{12}$. Donc les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{-\frac{t}{4}} + \dfrac{1}{3}$. L'égalité $h(0) = 1$ fournit $C + \dfrac{1}{3} = 1$ et donc $C = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{pour tout réel } t,\ h(t) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-\frac{t}{4}}),}$$

et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } t,\ u(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{t}{4}}} = f(t).}$$

c) D'après la question A.b), lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers 3. Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre de rongeurs a tendance à se stabiliser autour de 300.

