BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1) Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3i$, $-3-i$ et $2,08+1,98i$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle
(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2) A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3) Les notations sont les mêmes qu'à la question 2).
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4) Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ **(b)** : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
(c) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ **(d)** : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. Montrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

Pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
Pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.

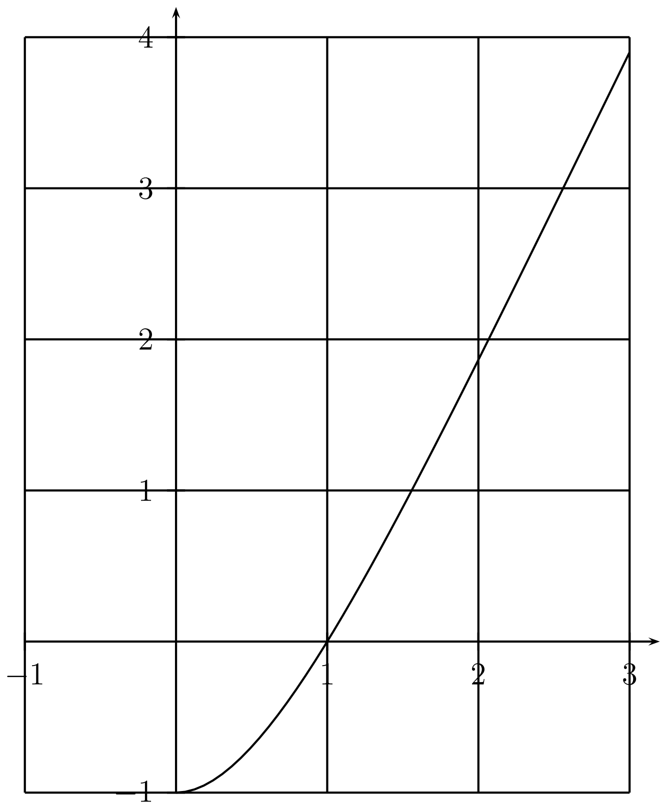
EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x}).$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2cm).



1) **a)** Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2) **a)** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4) **a)** Déterminer le point A où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les événements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 »	D_2 : « le dé indique 2 »
D_3 : « le dé indique 3 »	G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1) **a)** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$.

b) Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2) Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3) Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
Quel nombre minimal de parties doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe : exercice 2