BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

1. a. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto t$ sont continues sur $[1, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto t$ ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. f est donc continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [1, +\infty[.}$$

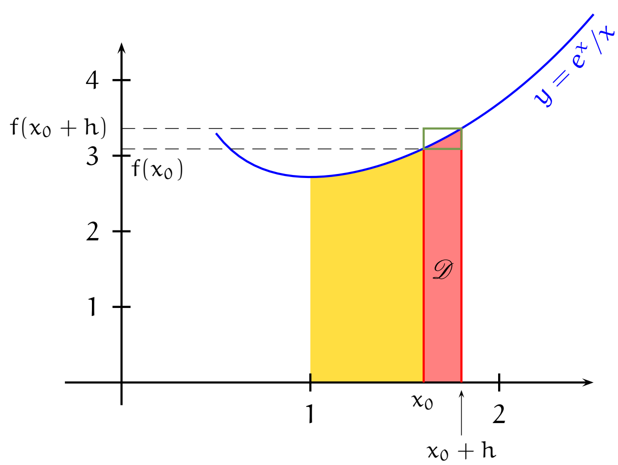
b. De même, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ et pour t réel supérieur ou égal à 1, on a

$$f'(t) = \frac{e^t \times t - e^t \times 1}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}.$$

Pour tout réel $t \geq 1$, on a $e^t > 0$, $t^2 > 0$ et $t - 1 \geq 0$. Par suite, la fonction f' est positive sur $[1, +\infty[$ et donc

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.}$$

2. Restitution organisée de connaissances :
a. $A(1) = 0$.
b. Soient x_0 un réel de $[1, +\infty[$ et h un réel strictement positif.
$\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D} = \{M(x, y)/\ x_0 \leq x \leq x_0 + h \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Puisque la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, l'aire de $\mathscr{D}$ est supérieure ou égale à l'aire du rectangle de largeur $(x_0+h)-x_0 = h$ et de longueur $f(x_0)$ et l'aire de $\mathscr{D}$ est inférieure ou égale à l'aire du rectangle de largeur $(x_0+h)-x_0 = h$ et de longueur $f(x_0 + h)$. Ceci fournit l'encadrement

$$hf(x_0) \leq \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) \leq hf(x_0 + h).$$

et donc, puisque $h > 0$,

$$\boxed{f(x_0) \leq \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0+h).}$$

c. Si $x_0 > 1$ et $h < 0$ tel que $x_0 + h \geq 1$, on applique l'encadrement précédent à $x_0' = x_0 + h$ et $h' = -h$. On a bien $x_0' \geq 1$ et $h' > 0$. Comme $x_0' + h' = x_0 + h - h = x_0$, l'encadrement

$$f(x_0') \leq \frac{\mathscr{A}(x_0'+h') - \mathscr{A}(x_0')}{h'} \leq f(x_0'+h').$$

s'écrit alors

$$f(x_0+h) \leq \frac{\mathscr{A}(x_0) - \mathscr{A}(x_0+h)}{-h} \leq f(x_0).$$

ou encore

$$f(x_0+h) \leq \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0).$$

d. Soit x_0 un réel strictement supérieur ou égal à 1.

D'après la question 1.a., f est continue en x_0. Donc, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. L'encadrement du c. et le théorème des gendarmes montre que le rapport $\dfrac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 par valeurs supérieures et que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0),$$

ce résultat restant valable quand $x_0 = 1$.

De même, l'encadrement du d. et le théorème des gendarmes montre que le rapport $\dfrac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 par valeurs inférieures et que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0),$$

En résumé, si $x_0 > 1$, le rapport $\dfrac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 et cette limite vaut $f(x_0)$ et si $x_0 = 1$ le rapport $\dfrac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 par valeurs supérieurs et cette limite vaut $f(x_0)$. A est donc dérivable en x_0 si $x_0 > 1$ et dérivable à droite en 1 et $A'(x_0) = f(x_0)$.

e. A est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $A' = f$. Donc

$$\boxed{A \text{ est une primitive de } f \text{ sur l'intervalle } [1, +\infty[.}$$

EXERCICE 2

Voir figure à la fin de l'exercice.

1. Ω est le milieu du segment $[AB]$ et donc

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2}(1 - 2i - 2 + 2i) = -\frac{1}{2}.$$

D'autre part, en notant R le rayon du cercle (C),

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}|z_B - z_A| = \frac{1}{2}|(-2+2i) - (1-2i)| = \frac{1}{2}|-3+4i| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+4^2} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\boxed{(C) \text{ est le cercle de centre } \Omega(-\frac{1}{2}, 0) \text{ et de rayon } \frac{5}{2}.}$$

2.

$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{3}{2} \times \frac{1+3i}{2+i} = \frac{3}{2} \times \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3}{2} \times \frac{5+5i}{2^2+1^2} = \frac{3}{2}(1+i).$$

$$\boxed{z_D = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \text{ ou encore } D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).}$$

Ensuite,

$$\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left|(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i) - (-\frac{1}{2})\right| = \left|2 + \frac{3}{2}i\right| = \frac{1}{2}|4+3i| = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = R.$$

$$\boxed{D \text{ appartient au cercle } (C).}$$

3. a. On sait que $z_E - z_\Omega = Re^{i\pi/4}$ ou encore $z + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}e^{i\pi/4}$ ou enfin $z + \frac{1}{2}$ est le nombre complexe de module $\frac{5}{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

b.

$$z_E = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i.$$

$$\boxed{z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i.}$$

4. a. On sait que si f est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ, l'expression complexe de f est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Donc

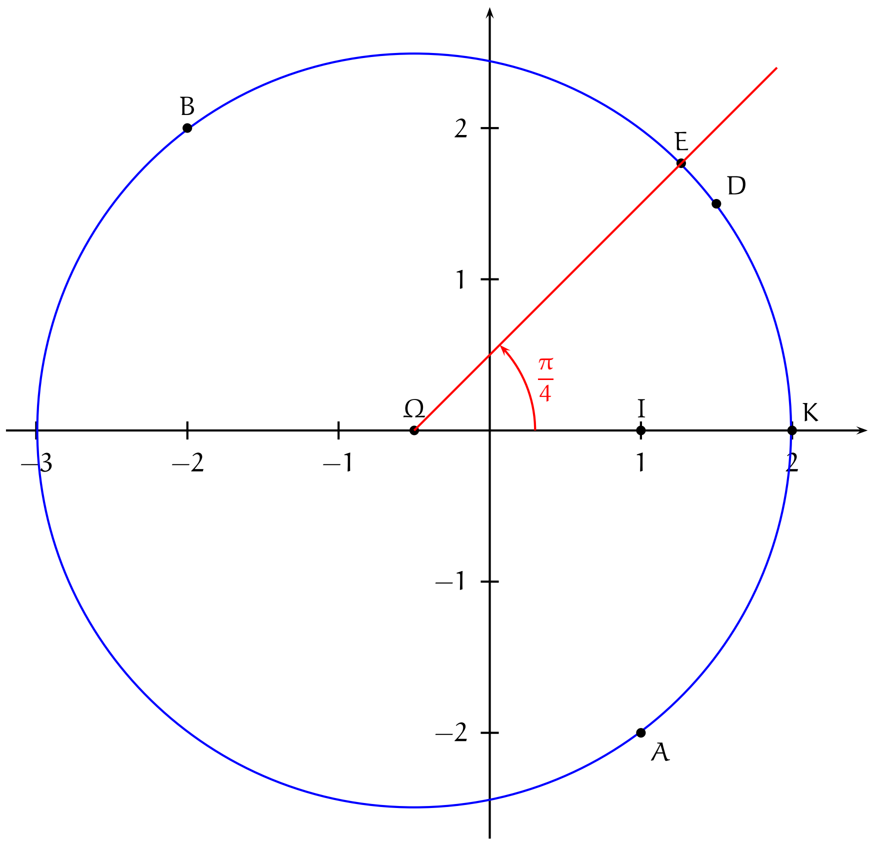
$$\boxed{r \text{ est la rotation de centre } \Omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4}.}$$

b. Si $z = z_K = 2$, d'après le calcul fait à la question 3.b.,

$$z' = -\frac{1}{2} + e^{i\pi/4}(z_K + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{i\pi/4} = -\frac{1}{2} + Re^{i\pi/4} = z_E.$$

Géométriquement, puisque $z_K = 2 = -\dfrac{1}{2} + R$, E est l'image du point K par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et donc $E = r(K)$.

$$\boxed{r(K) = E.}$$



EXERCICE 3

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0, 1, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2, 1, -1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

Ainsi, les points A, B et C définissent un plan.
b. $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = (-2) \times 3 + 1 \times 4 + (-1) \times (-2) = -6 + 4 + 2 = 0$. Donc

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est orthogonal aux vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}.}$$

Puisque le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Le plan (ABC) est donc le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Une équation cartésienne de ce plan est

$$3(x-1) + 4(y-0) - 2(z-2) = 0,$$

ou encore

$$\boxed{(ABC) \ : \ 3x + 4y - 2z + 1 = 0.}$$

2. a. Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\overrightarrow{n}_1(2, 1, 2)$. Un vecteur normal au plan P_2 est le vecteur $\overrightarrow{n}_2(1, -2, 6)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles. On sait alors que

$$\boxed{\text{les plans } P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont sécants selon une droite } D.}$$

Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite D.
Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$$\begin{aligned}
M \in P_1 \cap P_2 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2z - 1 \\ x - 2(-2x - 2z - 1) + 6z = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2z - 1 \\ 5x + 10z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z - \dfrac{2}{5} \\ y = -2\left(-2z - \dfrac{2}{5}\right) - 2z - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} - 2z \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} - 2k \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2k \\ z = k \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Un système d'équations paramétriques de la droite } D \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} - 2k \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2k \\ z = k \end{array}\right. , \ k \in \mathbb{R}.}$$

b. Dans le système précédent, on lit les coordonnées d'un vecteur directeur de D : le vecteur $\overrightarrow{u}(-2, 2, 1)$ est un vecteur directeur de D.
On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = (-2) \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) = -6 + 8 - 2 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et on sait alors que

$$\boxed{\text{la droite } D \text{ et le plan } (ABC) \text{ sont parallèles.}}$$

3. a. Soit t un réel positif. La somme des coefficients de A, B et C vaut $3 + t$ et est strcitement positive. En particulier, cette somme n'est pas nulle et donc G existe.

Les coordonnées de I sont $\left(\frac{x_A+2x_B}{3}, \frac{y_A+2y_B}{3}, \frac{z_A+2z_B}{3}\right)$ ou encore $\left(\frac{1+2}{3}, \frac{0+2}{3}, \frac{2+8}{3}\right)$ et donc

$$\boxed{I\left(1, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right).}$$

D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$G = \text{bar}\{A(1), B(2), C(t)\} = \text{bar}\{I(3), C(t)\}.$$

On sait alors que pour tout point M de l'espace, on a

$$3\overrightarrow{MI} + t\overrightarrow{MC} = (t+3)\overrightarrow{MG}.$$

Quand $M = I$, on obtient en particulier $t\overrightarrow{IC} = (t+3)\overrightarrow{IG}$ et donc

$$\boxed{\overrightarrow{IG} = \frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}.}$$

b. Pour t réel positif ou nul, posons $f(t) = \frac{t}{t+3}$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$f'(t) = \frac{1 \times (t+3) - t \times 1}{(t+3)^2} = \frac{3}{(t+3)^2}.$$

f' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{t}} = 1$. On en déduit que quand t décrit l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t)$ décrit l'intervalle $[0, 1[$. Enfin, puisque pour tout réel positif t, on a $\overrightarrow{IG} = f(t)\overrightarrow{IC}$,

$$\boxed{\text{lorsque } t \text{ décrit } [0, +\infty[\text{, le point } G \text{ décrit le segment } [IC] \text{ privé du point } C.}$$

Le point G est le point J si et seulement si le coefficient $\frac{t}{t+3}$ est égal à $\frac{1}{2}$. Or

$$\frac{t}{t+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = t+3 \Leftrightarrow t = 3.$$

$$\boxed{\text{Le point } G \text{ est le point } J \text{ si et seulement si } t = 3.}$$

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0,95\frac{n^{10}}{2^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \leq 0,95\frac{2^{n+1}}{2^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \leq 0,95 \times 2 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.}$$

2. a. f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour $x \geq 1$, $f'(x) = 10.\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^9 = -\frac{10}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^9$. f' est strictement négative sur $[1,+\infty[$ et donc

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [1,+\infty[.}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et donc $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$ tend vers $(1+0)^{10}$ c'est-à-dire 1.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$$

b. f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Or $f(1) = 2^{10} = 1024$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 1,9 < f(1)$ et l'équation $f(x) = 1,9$ admet une et une seule solution notée α dans $[1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \alpha \text{ et un seul dans l'intervalle } [1,+\infty[\text{ tel que } f(\alpha) = 1,9.}$$

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Puisque f est décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et que $n-1$, α et n sont dans cet intervalle,

$$n-1 \leq \alpha \leq n \Leftrightarrow f(n) \leq f(\alpha) \leq f(n-1) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \leq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{10} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} \leq \sqrt[10]{1,9} \leq 1+\frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \sqrt[10]{1,9}-1 \leq \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow n-1 \leq \frac{1}{\sqrt[10]{1,9}-1} \leq n\ (*).$$

Or $\frac{1}{\sqrt[10]{1,9}-1} = 15,08\ldots$ et donc, puisque n est un entier, l'encadrement $(*)$ équivaut à $n = 16$.

$$\boxed{n_0 = 16.}$$

d. Soit n un entier naturel non nul. De nouveau, f étant décroissante sur $[1,+\infty[$, si $n \geq 16 \geq \alpha$, on a $f(n) \leq f(16) \leq f(\alpha)$ ce qui s'écrit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 16, on a } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.}$$

3. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 16. D'après la question précédente, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$. D'après la question 1., on a encore $u_{n+1} \leq 0,95u_n$. Mais u_n est un réel strictement positif et donc, puisque $0,95 < 1$, on a $0,95u_n < u_n$.
Ainsi, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 16, on a $u_{n+1} < u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante à partir du rang } 16.}$$

b. La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et est minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

4. La suite (u_n) est positive.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$.

- Quand $n = 16$, on a $0,95^{n-16}u_{16} = 0,95^0 u_{16} = u_{16}$ et on a bien $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 16$.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 16. Supposons que $u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq 0,95u_n \text{ (d'après la question 1.)} \\ &\leq 0,95.0,95^{n-16}u_{16} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 0,95^{(n+1)-16}u_{16}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 16,\ u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}.}$$

Comme $|0,95| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^{n-16}u_{16} = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

