

EXERCICE 1

1. La probabilité demandée est $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

L'énoncé donne $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,1$. Puisque les événements A et B sont indépendants, on sait que les événements \overline{A} et \overline{B} sont aussi indépendants et donc

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A})p(\overline{B}) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = 0,98 \times 0,9 = 0,882.$$

$$p(C) = 0,882.$$

2. Une montre choisie au hasard peut

- ou bien ne présenter aucun défaut (événement C)
- ou bien présenter un et un seul des deux défauts (événement D)
- ou bien présenter les deux défauts (événement $A \cap B$),

ces trois événements étant deux à deux disjoints. D'après la formule des probabilités totales, on a $p(C) + p(D) + p(A \cap B) = 1$ et donc, puisque les événements A et B sont indépendants,

$$p(D) = 1 - p(C) - p(A \cap B) = 1 - p(C) - p(A)p(B) = 1 - 0,882 - 0,02 \times 0,1 = 1 - 0,884 = 0,116.$$

$$p(D) = 0,116.$$

3. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la montre ne présente aucun défaut » avec une probabilité $p = p(C) = 0,882$ (d'après 1.) ou « la montre présente au moins un des deux défauts » avec une probabilité $1 - p = 0,118$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,882$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 4)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geq 4) &= p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} (0,882)^4 (0,118)^1 + \binom{5}{5} (0,882)^5 (0,118)^0 = 5 \cdot (0,882)^4 \cdot 0,118 + (0,882)^5 \\ &= 0,891 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

$$p(E) = 0,891 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

EXERCICE 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. b.
2. c.
3. c.
4. c.
5. b.

Explications.

1. Soit $\Omega = \text{bar}\{A(4), B(-1)\}$. On sait que pour tout point M de l'espace, on a $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = (4-1)\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{MO}$. Par suite,

$$\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2 \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MO}\| = 2 \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MO}\| = 2 \Leftrightarrow \Omega M = \frac{2}{3}.$$

L'ensemble considéré est donc la sphère de centre Ω et de rayon $\frac{2}{3}$.

2. Le point de coordonnées $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ n'appartient pas au plan \mathcal{P} car $\frac{8}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{7}{3} = \frac{24}{3} = 8 \neq 5$. Les deux autres points par contre appartiennent au plan \mathcal{P} .

Le plan \mathcal{P} admet pour vecteur normal le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1, 2, 2)$.

Si H a pour coordonnées $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, alors \overrightarrow{AH} a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur \vec{n} . Enfin, si H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$, alors \overrightarrow{AH} a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Dans ce cas, on a $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\vec{n}$ et le point H de la proposition c. est le bon.

3. Calculons la distance d du point B au plan \mathcal{P} .

$$d = \frac{|1 \times (-6) + 2 \times 2 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{3}.$$

Puisque cette distance est strictement supérieure au rayon de la sphère considérée, l'intersection de la sphère de centre B et de rayon 1 et du plan \mathcal{P} est vide.

4. Un vecteur directeur de \mathcal{D}' est $\vec{u}'(2, 1, 1)$. Le vecteur \vec{u}' n'est pas colinéaire au vecteur \vec{u} et donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont ou bien coplanaires et sécantes ou bien non coplanaires. Il reste à étudier l'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

Un système d'équations paramétriques de la droite \mathcal{D} est
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$
 Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si et

seulement si il existe deux réels t et t' tels que
$$\begin{cases} x = 3 + t = 3 + 2t' \\ y = 1 + 2t = 3 + t' \\ z = 3 - t = t' \end{cases}.$$
 Or

$$\begin{cases} 3 + t = 3 + 2t' \\ 1 + 2t = 3 + t' \\ 3 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 3 - t \\ 3 + t = 3 + 2(3 - t) \\ 1 + 2t = 3 + (3 - t) \\ 3 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 3 - t \\ 3t = 6 \\ 3t = 5 \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution et donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. Finalement, puisque \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles, \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont non coplanaires.

5. Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z) .

$$MA = MB \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x+6)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow 18x - 2y + 4z + 22 = 0 \Leftrightarrow 9x - y + 2z + 11 = 0.$$

EXERCICE 3

Partie A

1. a. On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b. f est somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$ et donc

f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2. a. Soit n un entier naturel.

Tout d'abord, f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

f est donc continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On sait alors que pour

tout réel k , l'équation $f(x) = k$ admet une et une seule solution. En particulier, il existe un réel α_n et un seul tel que $f(\alpha_n) = n$.

b. Voir graphique page suivante.

c. Puisque $1 + \ln(1) = 1$, on a $\alpha_1 = 1$.

d. Soit n un entier naturel. Par définition, on a $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n + 1$. Donc, $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$. Puisque f est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ et donc que

la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a. On a $f(1) = 1 + \ln(1) = 1$. Puis pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et donc $f'(1) = 1 + 1 = 2$. Une équation de la tangente à la courbe (Γ) est $y - 1 = 2(x - 1)$ ou encore $y = 2x - 1$.

Une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1 est $y = 2x + 1$.

b. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Ainsi, si $x \in]0, 1[$, $h'(x) > 0$ et si $x \in]1, +\infty[$, $h'(x) < 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$. La fonction h admet donc un maximum en 1. Or $h(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$. On en déduit que

la fonction h est négative sur $]0, +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. On a

$$f(x) - (2x - 1) = x + \ln(x) - 2x + 1 = \ln(x) - x + 1 = h(x).$$

D'après ce qui précède, pour tout réel x strictement positif, on a $h(x) \leq 0$ et donc $f(x) \leq 2x - 1$. On en déduit que

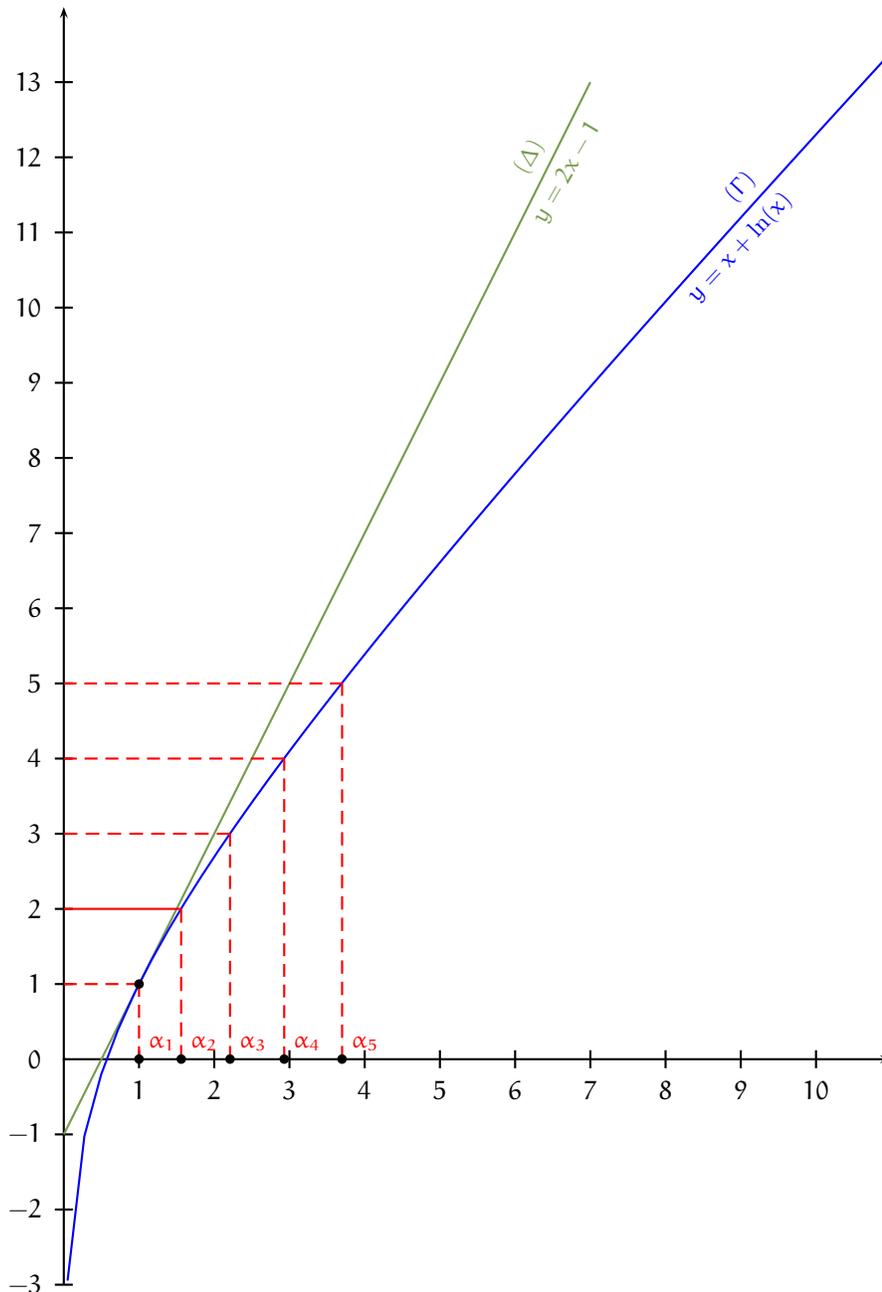
(Γ) est au-dessous de (Δ) sur $]0, +\infty[$.

c. Soit n un entier naturel. D'après la question b., on a $f(\alpha_n) \leq 2\alpha_n - 1$ ce qui s'écrit $n \leq 2\alpha_n - 1$ ou encore $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

pour tout entier naturel n , $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

4. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty.$$



Partie B

1. Démonstration de cours.

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Montrons que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit A un réel. Puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant de la suite (u_n) et donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Puisque la suite (u_n) est croissante, à partir du rang n_0 , on a $u_n \geq u_{n_0}$ et donc $u_n > A$. On a montré que pour tout réel A , tous les termes de la suite (u_n) sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On admet que la suite (β_n) est strictement croissante. Montrons que la suite (β_n) n'est pas majorée.

Soient A un réel puis $n_0 = \begin{cases} E(g(A)) + 1 & \text{si } g(A) \geq 0 \\ 0 & \text{si } g(A) < 0 \end{cases}$. Dans tous les cas, n_0 est un entier naturel et $n_0 > g(A)$ ou

encore $g(\beta_{n_0}) > g(A)$. Puisque g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\beta_{n_0} > A$, ce qui montre que A n'est pas un majorant de la suite (β_n) .

Ainsi, aucun réel ne majore la suite (β_n) ou encore la suite (β_n) n'est pas majorée.

En résumé, la suite (β_n) est une suite croissante et non majorée et donc d'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty.$$

EXERCICE 4

1. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 8$.
Soit z un nombre complexe.

$$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2^2) = (z - 2)(z^2 + 2z + 4).$$

Par suite,

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 4 = 0.$$

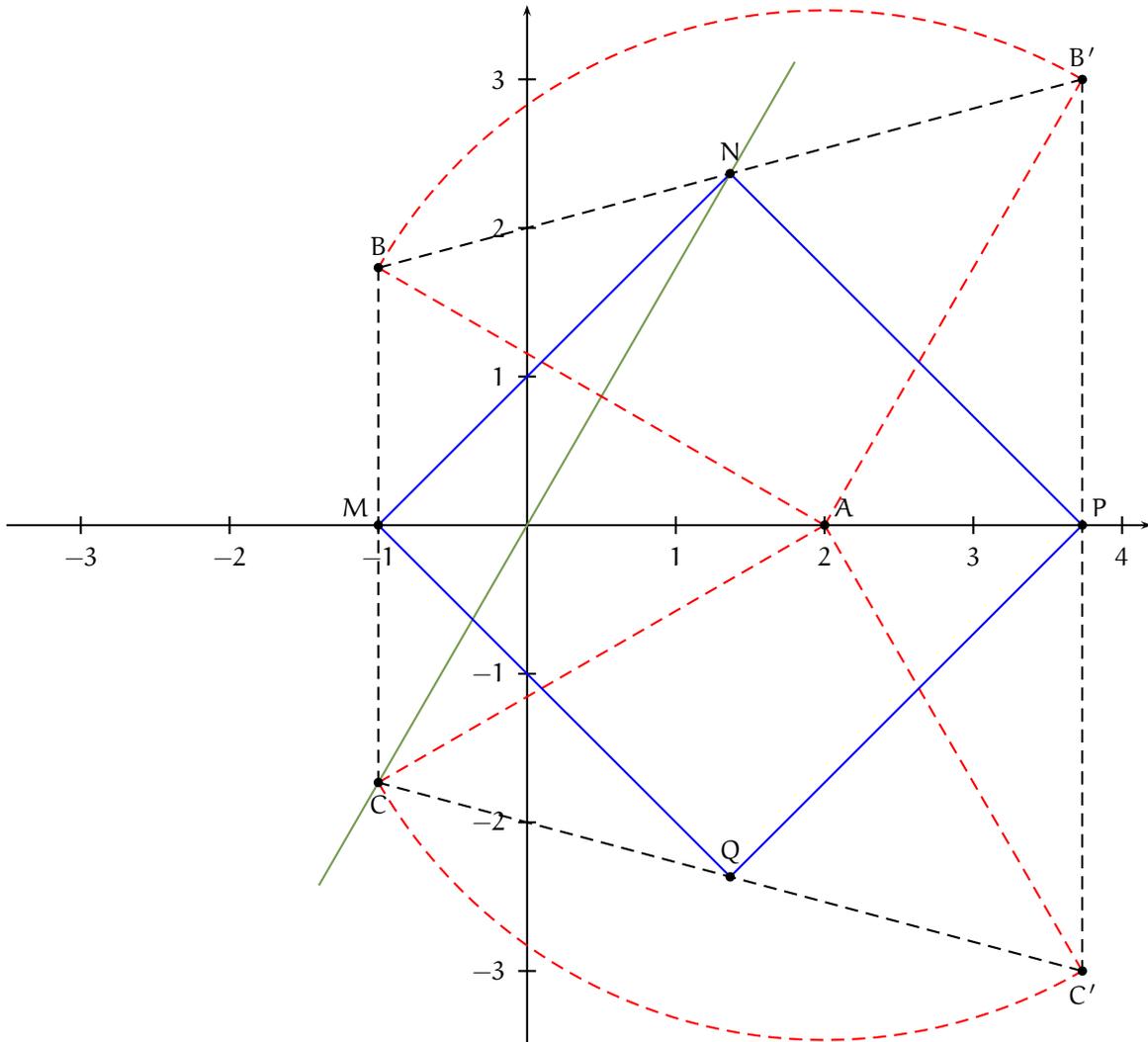
Calculons le discriminant de l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ (*).

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2.$$

On en déduit que l'équation (*) admet deux solutions non réelles conjuguées : $z_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3}$.

$$\mathcal{S} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.$$

2. a.



b. Soient Ω un point dont l'affixe est notée ω et θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Donc

$$b' = e^{-i\pi/2}(b - a) + a = -i((-1 + i\sqrt{3}) - 2) + 2 = -i(-3 + i\sqrt{3}) + 2 = 2 + \sqrt{3} + 3i.$$

$$b' = 2 + \sqrt{3} + 3i.$$

c. On note que $\bar{a} = a$ et que $\bar{b} = c$. Par suite,

$$c' = e^{i\pi/2}(c - a) + a = i(c - a) + a = \overline{-i(b - a) + a} = \bar{b}'.$$

$$c' = \bar{b}' = 2 + \sqrt{3} - 3i.$$

3. a.

$$n = \frac{1}{2}(b + b') = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i) = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{3}) + i\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

$$n = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

On remarque alors que $n = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}c$ ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{ON} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$. Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{ON} et \overrightarrow{OC} sont colinéaires et donc

les points O, N et C sont alignés.

b. D'après la question 2.c., on a $c' = \bar{b}'$ et donc

$$q = \frac{1}{2}(c + c') = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{b}') = \frac{1}{2}\overline{(b + b')} = \bar{n}.$$

Mais alors

$$i(q + 1) = i(\bar{n} + 1) = i\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3}) + 1\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(i + \sqrt{3}) + i = \frac{(3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})i}{2}.$$

et d'autre part

$$n + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1 = \frac{(3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})i}{2}.$$

Finalement,

$$n + 1 = i(q + 1).$$

Comme $m = -1$, l'égalité précédente s'écrit encore $q - m = e^{i\pi/2}(n - m)$ et signifie que Q est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.

Le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.

c. M et N sont les milieux respectifs des côtés [CB] et [BB'] du triangle CBB'. Donc la droite (MN) est parallèle à la droite (CB'). De même, la droite (PQ) est parallèle à la droite (CB'). On en déduit alors que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

De même, les droites (MQ) et (PN) sont parallèles. Finalement, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

D'après la question précédente, on a de plus $MN = MQ$ et $(MN) \perp (MQ)$. Finalement, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur. On en déduit que

le quadrilatère MNPQ est un carré.