BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

1.	**Faux**
2.	**Faux**
3.	**Vrai**
4.	**Faux**
5.	**Vrai**
6.	**Vrai**
7.	**Faux**
8.	**Faux**

Explications.

1. Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \neq -\infty$.

2. Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto -x$ et g est la fonction $x \mapsto e^x$, f et g sont définies sur $[0; +\infty[$, g ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \neq -1$.

3. Pour tout réel $x > 0$, on a $0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et comme $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4. Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $f(x) = 0$. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et f tend vers 0 quand x tend vers 0. La droite d'équation $x = 0$ n'est donc pas asymptote à la courbe représentative de f.

5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x = (2x + 3)e^x + f(x),$$

et donc, pour tout réel x, $f'(x) - f(x) = (2x + 3)e^x$.

6. Le théorème du barycentre partiel permet d'écrire

$$G = \text{bar}\{A(3), B(-2), C(1)\} = \text{bar}\{I(3-2), C(1)\} = \text{bar}\{I(1), C(1)\},$$

ce qui montre que G est le milieu du segment $[CI]$.

7. Pour tout point M du plan, on a $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3 - 2 + 1)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$ et donc $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = 1 \Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MG}\| = 1 \Leftrightarrow MG = \dfrac{1}{2}$. L'ensemble considéré est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

8. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

EXERCICE 2

1. L'énoncé donne directement $p(T_1) = 0,7$. Notons T_2 l'événement « le second test est positif ». L'événement C est réalisé si et seulement si l'événement T_1 est réalisé ou bien l'événement T_1 n'est pas réalisé et dans ce cas l'événement T_2 est réalisé. Donc

$$p(C) = p(T_1) + p(\overline{T_1} \cap T_2) = p(T_1) + p(\overline{T_1}).p_{\overline{T_1}}(T_2) = 0,7 + 0,3 \times 0,65 = 0,7 + 0,195 = 0,895.$$

$$\boxed{p(T_1) = 0,7 \text{ et } p(C) = 0,895.}$$

2. a. La variable aléatoire X prend trois valeurs : $x_1 = a - 1000$ (correspondant au cas où le premier test est positif), $x_2 = a - 1050$ (correspondant au cas où le premier test est négatif et le deuxième est positif) et $x_3 = -1050$ (correspondant au cas où les deux tests sont négatifs).

x_i	$a-1000$	$a-1050$	-1050
$p(X = x_i)$	$0,7$	$0,195$	$0,105$

$(p(X = -1050) = 1 - 0,7 - 0,195 = 0,105)$

b. L'espérance de X est

$$E(X) = 0,7(a - 1000) + 0,195(a - 1050) - 0,105(1050) = 0,895a - 1015.$$

$$\boxed{E(X) = 0,895a - 1015.}$$

c. L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices quand l'espérance $E(X)$ est strictement positive. Or

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow 0,895a - 1015 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1015}{0,895} \Leftrightarrow a > 1134,\ldots.$$

$$\boxed{\text{L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices si le prix de vente de l'écran est supérieur ou égal à } 1135 \text{ euros.}}$$

EXERCICE 3

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$. De plus, pour tout réel t de $[0;1]$, on a

$$f'(t) = (-1)e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t = g(t).$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une primitive de la fonction } g \text{ sur } [0;1].}$$

On en déduit que

$$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t \, dt = \int_0^1 g(t) \, dt = [f(t)]_0^1 = \left[(2-t)e^t\right]_0^1 = (2-1)e^1 - (2-0)e^0 = e-2.$$

$$\boxed{u_1 = e-2.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Pour $t \in [0;1]$, posons $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel t de $[0;1]$, on a $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ et $v'(t) = e^t$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1}e^t \, dt = \left[(1-t)^{n+1}e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-(n+1)(1-t)^n\right) e^t \, dt \\
&= (1-1)^{n+1}e^1 - (1-0)^{n+1}e^0 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -1 + (n+1)u_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.}$$

Partie B

Pour la première calculatrice, il semblerait que la suite (u_n) soit décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
Pour la deuxième calculatrice, il semblerait que la suite (u_n) soit tout d'abord décroissante puis croissante à partir du rang 14 et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie C

1. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a $1-t \geq 0$ et donc $(1-t)^n \geq 0$ puis $(1-t)^n e^t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \geq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geq 0.}$$

2. a. Soient n un entier naturel non nul et t un réel de $[0;1]$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^t \leq e^1 = e$. Mais alors, puisque $(1-t)^n \geq 0$, on a $(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$.

b. Mais alors, par croissance de l'intégrale on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \\
&\leq \int_0^1 e(1-t)^n \, dt = e\int_0^1 (1-t)^n \, dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= e\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e\left(-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{e}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

3. Puisque $\frac{e}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Partie D

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$.

- Pour $n = 1$, d'après la question A.1., on a $u_1 + (1!)(a+2-e) = e-2+a+2-e = a = v_1$. L'égalité ci-dessus est donc vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$. Alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= (n+1)v_n - 1 \\
&= (n+1)\left(u_n + (n!)(a+2-e)\right) - 1 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)u_n - 1 + (n+1).n!(a+2-e) \\
&= u_{n+1} + (n+1)!(a+2-e) \text{ (d'après la question A.2.).}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ v_n = u_n + (n!)(a+2-e).}$$

2. D'après la question C.3., on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. D'autre part, si $a > e-2$ alors $a+2-e > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (n!)(a+2-e) = +\infty$ et si $a < e-2$ alors $a+2-e < 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (n!)(a+2-e) = -\infty$. Enfin, si $a = e-2$, la suite v est la suite u. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ si } a > e-2 \\ 0 \text{ si } a = e-2 \\ -\infty \text{ si } a < e-2 \end{array}\right. .}$$

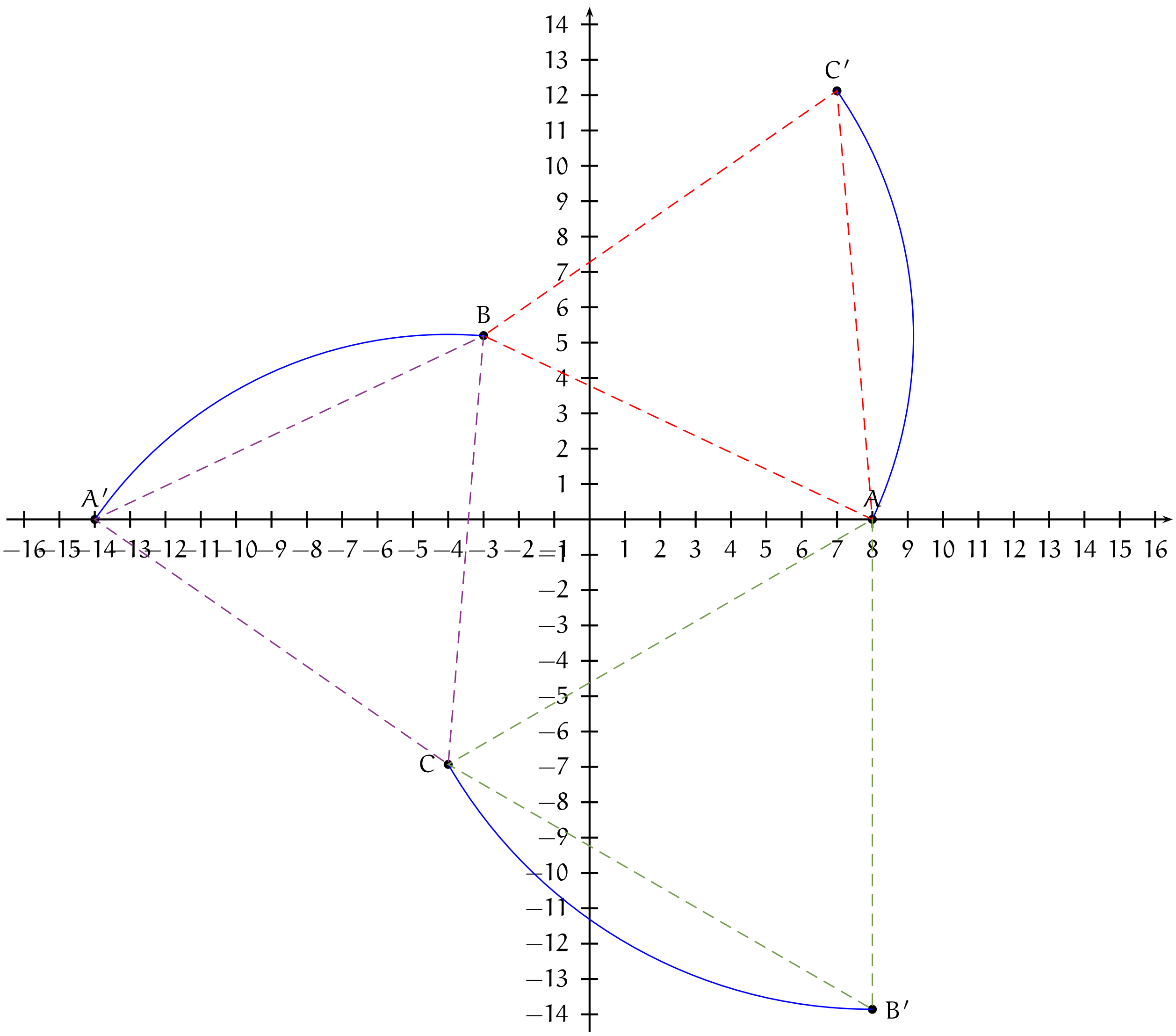
3. La première calculatrice prend pour a une valeur approchée par défaut de $e-2$ et différente de $e-2$ et la deuxième prend pour a une valeur approchée par excès de $e-2$ et différente de $e-2$. Il est donc normal que la suite semble tendre vers $-\infty$ dans le premier cas et vers $+\infty$ dans le deuxième.

Il faut noter qu'aucune calculatrice n'est capable de fournir le bon résultat car toute calculatrice ne travaille qu'avec des valeurs approchées de $e-2$ différentes de $e-2$.

EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $A(8,0)$, puis $b = 6j = 6e^{2i\pi/3} = 6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 6\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3}$ et donc $B(-3, 3\sqrt{3})$.

Enfin $c = 8j^2 = 8(e^{2i\pi/3})^2 = 8e^{4i\pi/3} = 8\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$ et donc $C(-4, 4\sqrt{3})$.



2. a. Soient θ un réel et Ω un point dont l'affixe est notée ω. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. On sait que l'expression complexe de r est

$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Donc

$$\begin{aligned} a' &= c + e^{i\pi/3}(b - c) = 8e^{4i\pi/3} + e^{i\pi/3}(6e^{2i\pi/3} - 8e^{4i\pi/3}) = 8e^{4i\pi/3} + 6e^{i\pi} - 8e^{5i\pi/3} \\ &= 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -14. \end{aligned}$$

$$\boxed{a' = -14 \text{ ou encore } A'(-14, 0).}$$

b. De même,

$$\begin{aligned}b' &= a + e^{i\pi/3}(c-a) = 8 + e^{i\pi/3}(8e^{4i\pi/3} - 8) = 8 + 8e^{5i\pi/3} - 8e^{i\pi/3}\\ &= 8 + 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(1 - i\sqrt{3}) = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16e^{-i\pi/3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{b' = 16e^{-i\pi/3} \text{ ou encore } B'(8, -8\sqrt{3}).}$$

c. On a $a' = -14 = -\frac{14}{8}.8 = -\frac{7}{4}a$ ou encore $\overrightarrow{OA'} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires ou encore, le point O appartient à la droite (AA').

$b' = 16e^{-i\pi/3} = 16e^{2i\pi/3 - i\pi} = 16e^{2i\pi/3}e^{-i\pi} = -16e^{2i\pi/3} = -\frac{16}{6}.6e^{2i\pi/3} = -\frac{8}{3}b$. Donc le point O appartient à la droite (BB').

$c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14e^{i\pi/3} = 14e^{4i\pi/3 - i\pi} = -14e^{4i\pi/3} = -\frac{14}{8}.8e^{4i\pi/3} = -\frac{7}{4}c$. Donc le point O appartient à la droite (CC').

$$\boxed{\text{Les droites } (AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes en } O.}$$

3. a. $OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = |8| + \left|6e^{2i\pi/3}\right| + \left|8e^{4i\pi/3}\right| = 8 + 6 + 8 = 22.$

$$\boxed{OA + OB + OC = 22.}$$

b. $j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{3.\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$ et d'autre part,

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

$$\boxed{j^3 = 1 \text{ et } 1 + j + j^2 = 0.}$$

c. Soit z un nombre complexe. Puisque $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$\begin{aligned}|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| &= |a + bj^2 + cj - (1 + j + j^2)z| = |a + bj^2 + cj|\\ &= |8 + 6j^3 + 8j^3| = |8 + 6 + 8| \text{ (car } j^3 = 1)\\ &= 22.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.}$$

d. Soit M un point du plan. On note z son affixe. Comme $|j| = |j^2| = 1$, on a

$$\begin{aligned}|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \leq |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j| = |a-z| + |b-z| \times |j^2| + |c-z| \times |j| =\\ |a-z| + |b-z| + |c-z| = MA + MB + MC.\end{aligned}$$

Mais d'après la question précédente, $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$ et on a donc montré que

$$\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MA + MB + MC \geq 22.$$

Comme d'autre part, d'après la question a., on a $OA + OB + OC = 22$, l'inégalité précédente est une égalité quand $M = O$. Donc

$$\boxed{MA + MB + MC \text{ est minimale lorsque } M = O.}$$

