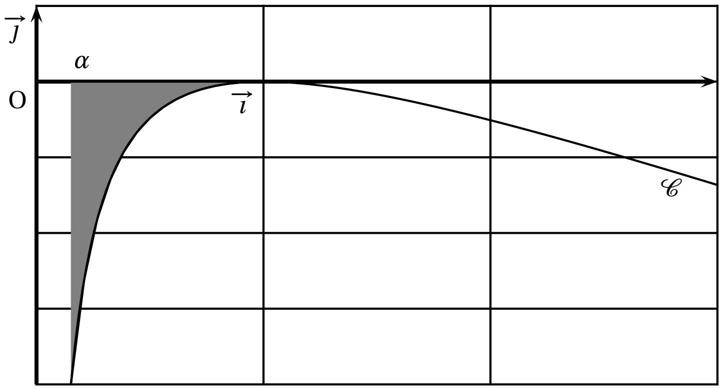
Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

Exercice 1
Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$



1. **a.** Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ est du signe de
$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x.\right]$$
   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.
2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0~;1[$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).
   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interpretation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1~;2]$ et :
$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,~u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$
   a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1~;~2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1~;2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.
   b. Déterminer la valeur exacte de l.

Exercice 2 **5 points**

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \qquad \text{et} \qquad z'' = z^2.$$

1. **a.** Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.
   b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.
2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M'_1, M''_1, M'_2 et M''_2 appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
3. On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$.
   b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.
4. On pose $z = \sqrt{3}e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.
   b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.
   c. Dans cette question $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M'_3 et M''_3 qui lui sont associés. Montrer que le triangle $M_3M'_3M''_3$ est rectangle. Est-il isocèle?

Exercice 2 **5 points**

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + i$, $3 + 2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

   a. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.
   b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
   c. Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.
2. **a.** Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1 + i)\overline{z} - 1 + 3i$.
3. **a.** Soit M_0 le point d'affixe 2 - 4 i.
   Determiner l'affixe du point $M''_0 = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''_0}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x++3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6 ; 6]$ tels que $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables.

On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et (C, 4) admettent un barycentre. On le note G.

2. **a.** Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E$_1$ « G apparutient à la droite (BC) » ;

E$_2$ « G appartient au segment [BC] ».

b. Montrer que la probabilité de l'évènement E$_3$: « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1.**.

On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E$_3$.

a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.