BACCALAUREAT GENERAL

Session de Novembre 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire et Enseignement de Spécialité

Amérique du sud

EXERCICE 1

Partie A

1. a. Pour tout réel positif x, $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$. D'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

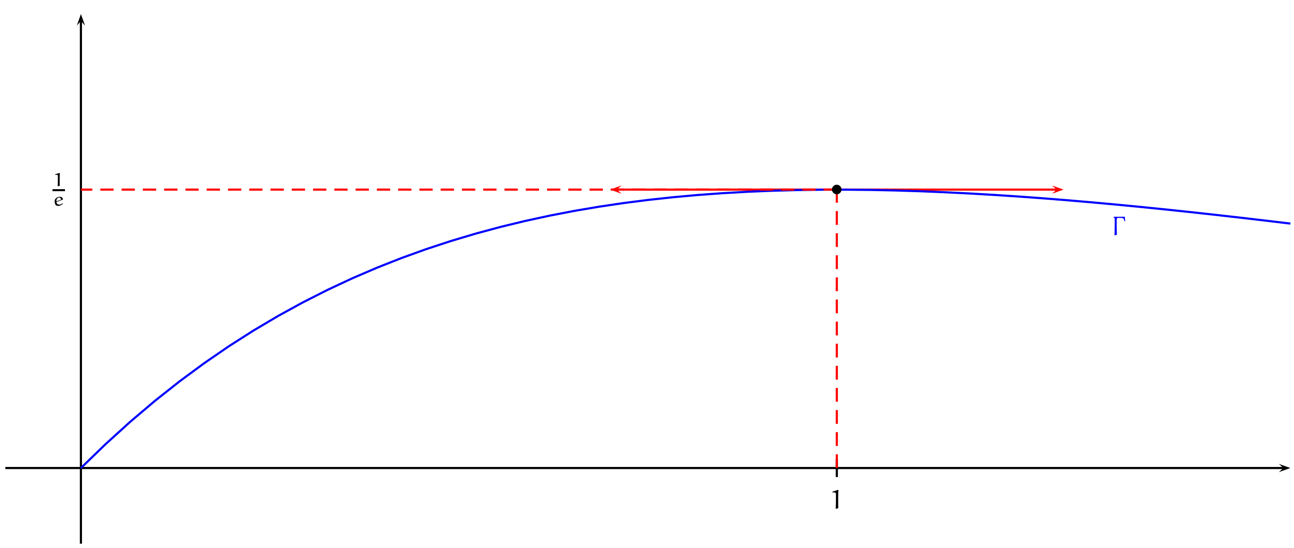
b. f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x).$$

Pour x réel positif donné, on a $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Ainsi, f' est strictement positive sur $[0,1[$, strictement négative sur $]1,+\infty[$ et s'annule en 1. f est donc strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
On peut alors dresser le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

c.



2. a. Soit m un réel élément de l'intervalle $]0, \frac{1}{e}[$.
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $[f(0), f(1)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 1]$. Mais $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$ et donc $f(0) < m < f(1)$. On en déduit que l'équation $f(x) = m$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 1]$ et que cette solution est dans $]0, 1[$. De même, f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc, pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < m < f(1)$. On en déduit que l'équation $f(x) = m$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et que cette solution est dans $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m \text{ de }]0, \tfrac{1}{e}[\text{, l'équation } f(x) = m \text{ admet exactement deux solutions dans } [0, +\infty[\text{, l'une dans }]0, 1[\text{, l'autre dans }]1, +\infty[.}$$

b. Soit α la solution dans $]0, 1[$ de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$. La machine fournit $f(0, 35) = 0, 246\ldots$ et $f(0.36) = 0, 251\ldots$. Par suite, $f(0, 35) < f(\alpha) < f(0, 36)$ et puisque f est strictement croissante sur $]0, 1[$, on a $0, 35 < \alpha < 0, 36$. Puisque $0, 36 - 0, 35 = 0, 01 = 10^{-2}$, cet encadrement est un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$$\boxed{0, 35 < \alpha < 0, 36.}$$

c. Le tableau de variations de f montre que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f(x) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = 1$.

Partie B

1. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
- Quand $n = 0$, on a $u_0 = \alpha$ et donc $u_0 > 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n > 0$. Alors puisque $e^{-u_n} > 0$ et que $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, on a $u_{n+1} > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n > 0.}$$

b. Soit n un entier naturel. Puisque u_n n'est pas nul, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$. Puisque $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < e^0$ ou encore $e^{-u_n} < 1$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et donc, puisque $u_n > 0$, on a $u_{n+1} < u_n$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul. De plus,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n e^{-u_n} = \ell e^{-\ell}.$$

Mais

$$\ell = \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \Leftrightarrow (\ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1) \Leftrightarrow \ell = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2. a. Soit n un entier naturel.

$$w_{n+1} = \ln(u_n e^{-u_n}) = \ln(u_n) + \ln(e^{-u_n}) = w_n - u_n,$$

et donc $u_n = w_n - w_{n+1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = w_n - w_{n+1}.}$$

b. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2) + \ldots + (w_n - w_{n+1}) \\ &= w_0 + (-w_1 + w_1) + \ldots + (-w_n + w_n) - w_{n+1} = w_0 - w_{n+1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = w_0 - w_{n+1}.}$$

c. Pour n entier naturel, on a $S_n = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1})$. Or, quand n tend vers $+\infty$, u_{n+1} tend vers 0 par valeurs supérieures. Par suite, $\ln(u_{n+1})$ tend vers $-\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = \beta$ (β a été défini à la question A.2.b. : β est l'autre solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$) et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n = u_n$.

- Pour $n = 1$, on a $v_1 = f(v_0) = f(\beta) = f(\alpha) = f(u_0) = u_1$ et l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $v_n = u_n$. Alors

$$v_{n+1} = f(v_n) = f(u_n) = u_{n+1}.$$

On a montré par récurence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n$.

$$\boxed{\text{Si } v_0 = \beta \text{ alors pour tout entier naturel } n \geq 1,\ v_n = u_n.}$$

EXERCICE 2

1. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-x}$ où C est une constante réelle.
Mais alors, $f(0) = e \Leftrightarrow Ce^0 = e \Leftrightarrow C = e$. On a alors pour tout réel x, $f(x) = e \times e^{-x} = e^{1-x}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = e^{1-x}.}$$

2. Soient t un réel élément de $[1; e]$ et x un réel.

$$e^{1-x} = t \Leftrightarrow 1 - x = \ln(t) \Leftrightarrow x = 1 - \ln(t).$$

3. Pour t élément de $[1; e]$, posons $u(t) = (1 - \ln(t))^2$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1; e]$ et pour t élément de $[1; e]$, on a $u'(t) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{t}\right) \times (1 - \ln(t)) = -2 \times \dfrac{1 - \ln(t)}{t}$ et $v'(t) = 1$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1; e]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^e (1 - \ln(t))^2 \, dt &= \left[t(1 - \ln(t))^2\right]_1^e - \int_1^e t \times \left(-2\frac{1 - \ln(t)}{t}\right) \, dt = e(1 - 1)^2 - 1(1 - 0)^2 + 2\int_1^e (1 - \ln(t)) \, dt \\ &= -1 + 2\int_1^e (1 - \ln(t)) \, dt.\end{aligned}$$

De même, en posant $u(t) = 1 - \ln(t)$ et $v(t) = t$ de sorte que $u'(t) = -\dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_1^e (1 - \ln(t)) \, dt &= [t(1 - \ln(t))]_1^e - \int_1^e t \left(-\frac{1}{t}\right) \, dt = e(1 - 1) - 1(1 - 0) + \int_1^e dt \\ &= -1 + (e - 1) = e - 2.\end{aligned}$$

Finalement

$$V = \pi\,[-1 + 2(e - 2)] = \pi(2e - 5).$$

$$\boxed{V = \pi(2e - 5).}$$

EXERCICE 3

1. Le nombre de tirages successifs sans remise de deux boules dans une urne en contenant 6 est 6×5 ou encore 30.
Parmi ces tirages, il y en a $4 \times 3 = 12$ ne contenant pas de boules noires et donc $p(A_0) = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$.
Il y a aussi $2 \times 1 = 2$ tirages constitués de boules noires uniquement et donc $p(A_2) = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$.
Enfin, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(A_1) = 1 - p(A_0) - p(A_2) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}.$$

$$\boxed{p(A_0) = \frac{2}{5},\ p(A_1) = \frac{8}{15} \text{ et } p(A_2) = \frac{1}{15}.}$$

2. a. Quand l'événement A_0 est réalisé, l'urne contient 2 boules rouges et deux boules noires après le premier tirage. On a donc $p_{A_0}(B_0) = \dfrac{2 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{6}$.
Quand l'événement A_1 est réalisé, l'urne contient 3 boules rouges et 1 boule noire après le premier tirage. On a donc $p_{A_1}(B_0) = \dfrac{3 \times 2}{4 \times 3} = \dfrac{1}{2}$.
Quand l'événement A_2 est réalisé, l'urne ne contient plus de boule noire après le premier tirage. On a donc $p_{A_2}(B_0) = 1$.

$$\boxed{p_{A_0}(B_0) = \frac{1}{6},\ p_{A_1}(B_0) = \frac{1}{2} \text{ et } p_{A_2}(B_0) = 1.}$$

b. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(B_0) &= p(B_0 \cap A_0) + p(B_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_2) = p(A_0) \times p_{A_0}(B_0) + p(A_1) \times p_{A_1}(B_0) + p(A_2) \times p_{A_2}(B_0) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \times 1 = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(B_0) = \frac{2}{5}.}$$

c. De même

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(B_2 \cap A_0) + p(B_2 \cap A_1) + p(B_2 \cap A_2) = p(A_0) \times p_{A_0}(B_2) + p(A_1) \times p_{A_1}(B_2) + p(A_2) \times p_{A_2}(B_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{8}{15} \times 0 + \frac{1}{15} \times 0 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

et enfin

$$p(B_1) = 1 - p(B_0) - p(B_2) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}.$$

$$\boxed{p(B_0) = \frac{2}{5} = p(A_0),\ p(B_1) = \frac{8}{15} = p(A_1) \text{ et } p(B_2) = \frac{1}{15} = p(A_2).}$$

d. La probabilité demandée est $p_{B_1}(A_1)$.

$$p_{B_1}(A_1) = \frac{p(B_1 \cap A_1)}{p(B_1)} = \frac{p(A_1) \times p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)} = p_{A_1}(B_1) = \frac{2 \times (3 \times 1)}{4 \times 3} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{p_{B_1}(A_1) = \frac{1}{2}.}$$

3. R est l'événement $(A_0 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_1)$. Donc, puisque les événements $(A_0 \cap B_2)$ et $(A_1 \cap B_1)$ sont disjoints

$$p(R) = p(A_0 \cap B_2) + p(A_1 \cap B_1) = p(A_0) \times p_{A_0}(B_2) + p(A_1) \times p_{A_1}(B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p(R) = \frac{1}{3}.}$$

EXERCICE 4
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)
Partie A
1. Γ est le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = 5$ et de rayon 5.
- $\Omega A = |a - \omega| = |(5+5i) - 5| = |5i| = 5$,
- $\Omega B = |b - \omega| = |(1+3i) - 5| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
- $\Omega C = |c - \omega| = |(8-4i) - 5| = |3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

$$\boxed{\text{Les points A, B et C appartiennent au cercle } \Gamma.}$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(2, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(7, -7)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(1, -1)$.
- Puisque $\overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{BC}$, le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$ et donc le point D appartient à la droite (BC).
- $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BD} = 2 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

Finalement,

$$\boxed{\text{le point D est le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).}}$$

Partie B
1. Soit M un point du plan différent de O. On note z l'affixe du point M. On a

$$z_{\overrightarrow{OM'}} = z' - 0 = \frac{20}{\overline{z}} = \frac{20z}{z \times \overline{z}} = \frac{20}{|z|^2}z = \frac{20}{|z|^2}z_{\overrightarrow{OM}}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{20}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$. Comme le nombre $\dfrac{20}{|z|^2}$ est un réel, on a montré que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et donc que

$$\boxed{\text{les points O, M et M}' \text{ sont alignés.}}$$

2. a. Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Mais alors $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$. Par suite

$$M \in \Delta \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 4.$$

b. Soit M un point de Δ. On note z l'affixe de M.

$$z' + \overline{z'} = \frac{20}{\overline{z}} + \overline{\left(\frac{20}{\overline{z}}\right)} = \frac{20}{\overline{z}} + \frac{20}{\overline{\overline{z}}} = \frac{20}{\overline{z}} + \frac{20}{z} = 20 \times \frac{z + \overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{80}{z\overline{z}}.$$

Mais alors,

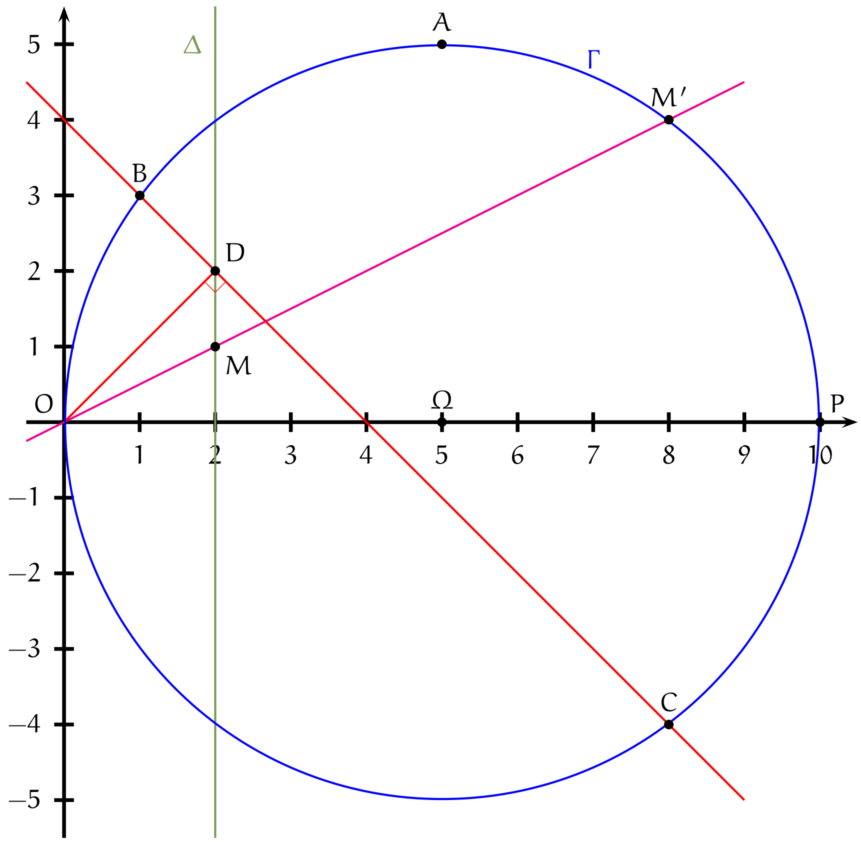
$$5(z' + \overline{z'}) = \frac{400}{z\overline{z}} = \frac{20}{\overline{z}} \times \frac{20}{z} = \frac{20}{\overline{z}}\overline{\left(\frac{20}{\overline{z}}\right)} = z'\overline{z'}.$$

c. On sait déjà que le point M′ appartient à la droite (OM). Notons alors (x', y') les coordonnées de M′. D'après la question b., on a $5(z' + \overline{z'}) = z'\overline{z'}$. Mais

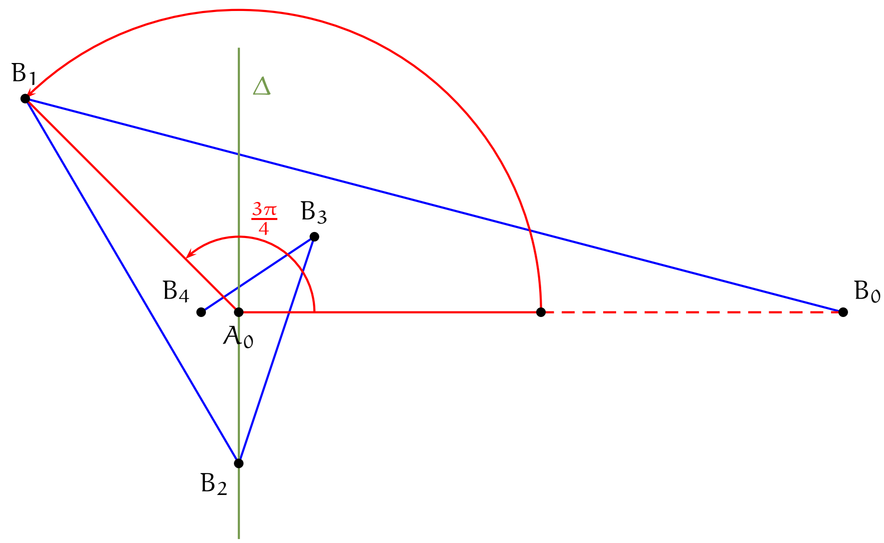
$$5(z' + \overline{z'}) = z'\overline{z'} \Rightarrow x'^2 + y'^2 = 5(2x') \Rightarrow x'^2 - 10x' + y'^2 = 0 \Rightarrow (x' - 5)^2 + y'^2 = 25 \Rightarrow \Omega M' = 5 \Rightarrow M' \in \Gamma.$$

En notant de plus que $M' \neq O$, on a montré que

$$\boxed{\text{M}' \text{ est le point commun à la droite (OM) et au cercle } \Gamma \text{ qui n'est pas le point O.}}$$


A
Δ
Γ
M′
B
D
M
O
Ω
P
C
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−1
−2
−3
−4
−5

EXERCICE 4
(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)
Partie A
1.



2. Soit n un entier naturel. Le triangle $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ est le triangle $S(A_0)S(B_n)S(B_{n+1})$ ou encore l'image du triangle $A_0B_nB_{n+1}$ par la similitude S. Par suite, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. a. Soit n un entier naturel.

$$l_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = S(B_n)S(B_{n+1}) = \frac{1}{2}B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}l_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (l_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$$

b. On sait alors que pour tout entier naturel n, $l_n = l_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La formule d'AL-KASCHI permet alors d'écrire

$$l_0^2 = B_0B_1^2 = A_0B_0^2 + A_0B_1^2 - 2A_0B_0 \times A_0B_1 \times \cos(\widehat{B_0A_0B_1}) = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 80 + 32\sqrt{2},$$

et donc

$$\boxed{l_0 = \sqrt{80 + 32\sqrt{2}} = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.}$$

c. Soit n un entier naturel. Puisque la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$,

$$\Sigma_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n = l_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2l_0\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n = 2l_0 = 8\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.}$$

4. a. Puisque $3 \times 2 - 4 \times 1 = 2$, le couple $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est un couple solution de l'équation proposée. Soit alors x et y deux entiers relatifs quelconques.

$$3x - 4y = 2 \Rightarrow 3x - 4y = 3x_0 - 4y_0 \Rightarrow 3(x - x_0) = 4(y - y_0).$$

Mais alors, puisque l'entier 4 divise l'entier $4(y - y_0)$, l'entier 4 divise l'entier $3(x - x_0)$ et puisque les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 4 divise l'entier $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 4k$ ou encore $x = 2 + 4k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 3k'$ ou encore $y = 1 + 3k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = 2 + 4k$ et $y = 1 + 3k'$. Alors

$$3x - 4y = 3(2 + 4k) - 4(1 + 3k') = 2 + 12(k - k'),$$

et donc

$$3x - 4y = 2 \Leftrightarrow 2 + 12(k - k') = 2 \Leftrightarrow 12(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les couples d'entiers relatifs } (x, y) \text{ solutions de l'équation } 3x - 4y = 2\\ \text{sont les couples de la forme } (2 + 4k, 1 + 3k),\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}}$$

b. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(A_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'origine A_0 dans lequel le point B_0 a pour coordonnées $(8, 0)$. L'expression complexe de la similitude S est alors $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z$.

Pour n entier naturel donné, on note b_n l'affixe du point B_n. Pour tout entier naturel n, on a donc $b_{n+1} = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}b_n$. La suite (b_n) est donc une suite géométrique de premier terme $b_0 = 8$ et de raison $\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$b_n = b_0\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^n = \frac{8}{2^n}e^{i\frac{3n\pi}{4}} = \frac{1}{2^{n-3}}e^{i\frac{3n\pi}{4}}.$$

La droite Δ passant par A_0 et perpendiculaire à la droite (A_0B_0) est la droite d'équation $x = 0$ ou encore « l'axe des imaginaires purs ».
Par suite, pour n entier naturel donné,

$$\begin{aligned}B_n \in \Delta &\Leftrightarrow b_n \text{ est imaginaire pur}\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } p \text{ tel que } \arg(b_n) = \frac{\pi}{2} + p\pi \text{ (car } b_n \neq 0)\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } p \text{ tel que } \frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + p\pi\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } p \text{ tel que } \frac{3n}{4} = \frac{1}{2} + p\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } p \text{ tel que } 3n = 2 + 4p\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } p \text{ tel que } 3n - 4p = 2.\end{aligned}$$

Mais alors, d'après la question a., il existe un entier relatif k tel que $n = 2 + 4k$.

Réciproquement, posons $n = 2 + 4k$ où k est un entier relatif. n est un entier naturel si et seulement si k est un entier naturel. De plus, si on pose $p = 1 + 3k$, la question a. montre que p est un entier relatif tel que $3n - 4p = 2$ et donc B_n appartient à la droite Δ. Finalement,

$$\boxed{\text{les entiers naturels } n \text{ tels que } B_n \text{ appartienne à } \Delta \text{ sont les entiers de la forme } 2 + 4k \text{ où } k \text{ est un entier naturel.}}$$

