# BACCALAUREAT GENERAL

## Session 2004

## MATHEMATIQUES

## - Série S -

## Enseignement de Spécialité

## Réunion

---

**EXERCICE 1**

**A - Lecture graphique**

**1.** Soit $k$ un réel. Une lecture graphique nous apprend que
- si $k < 0$ ou $k > 1$, l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution dans $[0, +\infty[$,
- si $0 < k < 1$, l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions dans $[0, +\infty[$,
- Si $k = 0$ ou si $k = 1$, l'équation $f(x) = k$ admet exactement une solution dans $[0, +\infty[$.

**2.** Soit $n$ un entier naturel. $0 < \dfrac{1}{n} < 1$ équivaut à $n > 1$ ou encore $n \geq 2$. Donc, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes si et seulement si $n \geq 2$.

**B - Définition et étude de deux suites**

**1.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. On sait alors que pour tout réel $k$ de l'intervalle $[f(1), f(0)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 1]$. Maintenant, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et puisque $n$ est supérieur ou égal à 2, on a $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$ ou encore $f(1) \leq \dfrac{1}{n} \leq f(0)$. On en déduit que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une et une seule solution notée $u_n$ dans l'intervalle $[0, 1]$.
De même, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et donc pour tout réel $k$ de l'intervalle $[f(1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$ c'est-à-dire l'intervalle $[0, 1[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
Comme $0 \leq \dfrac{1}{n} < 1$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une et une seule solution notée $v_n$ dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

**2.** Voir graphique à la fin de l'exercice.

**3.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, on a $f(u_{n+1}) < f(u_n)$. Comme $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et que $u_n$ et $u_{n+1}$ sont éléments de $[0, 1]$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a $u_n < u_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

De même, pour $n$ entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, $f(v_{n+1}) < f(v_n)$ et puisque $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et que les réels $v_n$ et $v_{n+1}$ sont éléments de cet intervalle, on a $v_{n+1} < v_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

**4.** La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1. Donc la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite. Puisque, pour tout entier naturel $n$, on a $0 \leq u_n \leq 1$, quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leq \ell \leq 1$.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ $(*)$. La fonction $f$ est continue sur $[0, 1]$ et en particulier en $\ell$. Par suite, quand $n$ tend vers $+\infty$, $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient alors $f(\ell) = 0$. Mais l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, 1]$ à savoir $x = 1$. Par suite, $\ell = 1$.

La suite $(u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

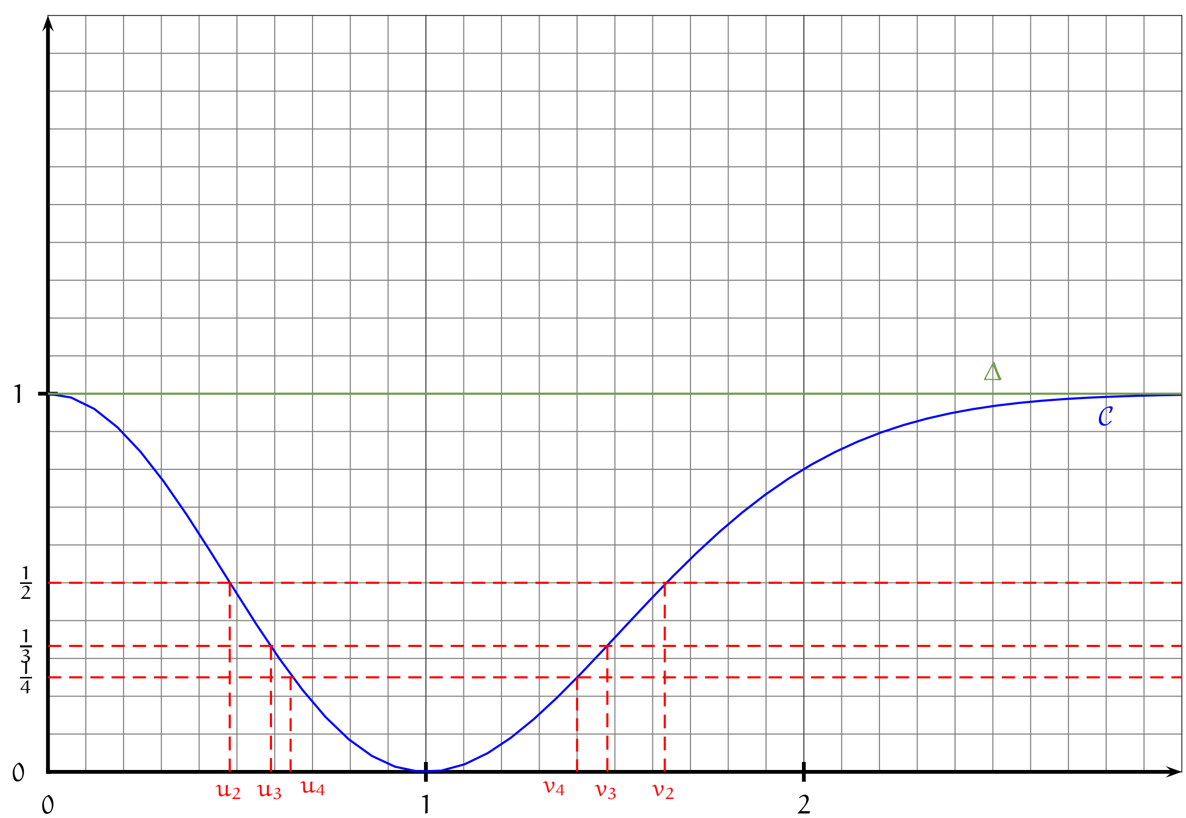
De même, la suite $(v_n)$ est décroissante et minorée par 1. Donc la suite $(v_n)$ converge vers un réel $\ell'$ de $[1, +\infty[$. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'égalité $f(v_n) = \dfrac{1}{n}$, on obtient $f(\ell') = 0$ et donc $\ell' = 1$.

La suite $(v_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Ainsi,
- la suite $(u_n)$ est croissante,
- la suite $(v_n)$ est décroissante,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 1 - 1 = 0$.

On en déduit que

les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.



**EXERCICE 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1. a.** Un diviseur commun à 2 et $p$ est en particulier un diviseur de 2 et donc est égal à 1 ou à 2. Comme $p$ est impair, 2 ne divise pas $p$ et finalement un diviseur commun à 2 et $p$ est nécessairement égal à 1. Ainsi, 2 et $p$ sont premiers entre eux.

D'après le petit théorème de FERMAT, on a alors $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$. L'entier $k = p-1$ est donc un entier naturel non nul (car $p \geq 3$ et donc $p-1 \geq 2$) tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

**b.** Soit $k$ un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit $n$ un entier naturel multiple de $k$. Il existe donc un entier naturel $q$ tel que $n = k \times q$. Mais alors, puisque $2^n = 2^{kq} = (2^k)^q$, on a $2^n \equiv 1^q \quad [p]$ ou encore $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

**c.** Soit $n$ un entier naturel tel que $2^n \equiv 1 \quad [p]$. La division euclidienne de $n$ par $b$ s'écrit $n = bq + r$ où $q$ est un entier naturel et $r$ un entier naturel tel que $0 \leq r \leq b-1$. On a alors

$$2^n = (2^b)^q \times 2^r \equiv 2^r \quad [p],$$

et donc

$$2^r \equiv 1 \quad [p].$$

$r$ est donc un entier naturel strictement inférieur à $b$ et vérifie $2^r \equiv 1 \quad [p]$. Par définition de $b$, on a nécessairement $r = 0$. Ceci montre que $b$ divise $n$.

**2. a.** Puisque $p$ est un facteur premier de $A$, $p$ divise $A$ ce qui s'écrit $2^q - 1 \equiv 0 \quad [p]$ ou encore $2^q \equiv 1 \quad [p]$.
**b.** L'entier $q$ est supérieur ou égal à 1. Par suite, $2^q$ est un nombre pair et donc $A$ est un nombre impair. $p$ ne peut donc pas être égal à 2 et comme 2 est le seul nombre premier pair, nécessairement $p$ est impair.
**c.** $q$ est un entier naturel non nul et vérifie $2^q \equiv 1 \quad [p]$. Puisque $p$ est impair, la question 1.c. permet d'affirmer que $b$ divise $q$.

Comme $q$ est un nombre premier, on a nécessairement $b = 1$ ou $b = q$. Mais si $b = 1$, par définition de $b$ on a $2^1 \equiv 1 \quad [p]$ ou encore $1 \equiv 0 \quad [p]$. Ceci signifie que $p$ divise 1 ce qui n'est pas. Donc $b = q$.
**d.** D'après le petit théorème de FERMAT, $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$. Puisque $p-1$ est un entier naturel non nul et que $b = q$, la question 1.c. permet d'affirmer que $q$ divise $p-1$. Ceci s'écrit encore $p - 1 \equiv 0 \quad [q]$ ou aussi $p \equiv 1 \quad [q]$.

**3.** Dans cette question, on prend $q = 17$. D'après la question 2.d., un facteur premier $p$ impair de $A_1$ est congru à 1 modulo 17 ou encore est de la forme $17k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. $p$ étant impair, l'entier $17k$ doit être pair et il en est de même de $k$. Donc, il existe un entier naturel $m$ tel que $k = 2m$ puis $p = 34m + 1$.

D'autre part, on sait qu'un entier naturel supérieur ou égal à 2 n'est pas premier si et seulement si il est divisible par au moins un nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée. Or

$$\sqrt{2^{17}-1} < \sqrt{2^{17}} = 2^{8,5} = 362,\ldots < 400.$$

Ainsi, l'entier $A_1$ n'est pas premier si et seulement si il est divisible par l'un des entiers 103, 137, 239 ou 307. Maintenant,

- $2^{17} = (2^7)^2 \times 2^3$. Or $2^7 = 128$ et donc $2^7 \equiv 25 \quad [103]$ puis $2^{17} \equiv (25)^2 \times 8 \quad [103]$ ou encore, puisque $(25)^2 = 625 = 618 + 7 = 6 \times 103 + 7$, $2^{17} \equiv 7 \times 8 \quad [103]$ ou enfin $2^{17} \equiv 56 \quad [103]$. En particulier, $2^{17} \not\equiv 1 \quad [103]$. $A_1$ n'est donc pas divisible par le nombre premier 103.
- $2^{17} = (2^7)^2 \times 2^3 = (128)^2 \times 8$ et $(128)^2 \equiv (-9)^2 \quad [137]$. Ceci fournit $2^{17} \equiv 81 \times 8 \quad [137]$ ou encore $2^{17} \equiv 648 \quad [137]$ ou enfin $2^{17} \equiv 100 \quad [137]$. $A_1$ n'est pas divisible par le nombre premier 137.
- $2^{17} = (2^8)^2 \times 2 = 256^2 \times 2$. Donc $2^{17} \equiv (17)^2 \times 2 \quad [239]$ ou encore $2^{17} \equiv 100 \quad [239]$. $A_1$ n'est donc pas divisible par le nombre premier 239.
- $2^{17} = (2^8)^2 \times 2 = 256^2 \times 2$. Donc $2^{17} \equiv (-51)^2 \times 2 \quad [307]$ ou encore $2^{17} \equiv 5202 \quad [307]$ ou enfin $2^{17} \equiv 290 \quad [307]$. $A_1$ n'est donc pas divisible par le nombre premier 307.

Finalement

$$\boxed{\text{L'entier } 2^{17} - 1 \text{ est un nombre premier.}}$$

**EXERCICE 3**

| | |
|---|---|
| **I.1.** | **C** |
| **I.2.** | **D** |
| **II.1.** | **A** |
| **II.2.a.** | **B** |
| **II.2.b.** | **B** |

**Explications.**

**Première partie**

**1.** Notons $X$ le nombre d'étiquettes comportant une adresse erronée. La variable aléatoire $X$ est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- $10$ expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'étiquette comporte une adresse erronée » avec une probabilité $p = \dfrac{120}{6000}$ ou « l'étiquette comporte une adresse exacte » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{5880}{6000}$.

La variable aléatoire $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{120}{6000}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$ et on a

$$p(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{120}{6000}\right)^3\left(\frac{5880}{6000}\right)^7.$$

**2.** Notons $E$ l'événement « l'étiquette comporte une adresse exacte ». La probabilité demandée est $p_E(B_1)$. Il y a $5880 + 3800 = 9680$ étiquettes comportant une adresse exacte et donc $p(E) = \dfrac{9680}{10000}$. D'autre part, il y a $5880$ étiquettes comportant une adresse exacte et provenant de la banque $B_1$ et donc $p(E \cap B_1) = \dfrac{5880}{10000}$. Par suite,

$$p_E(B_1) = \frac{p(E \cap B_1)}{p(E)} = \frac{\frac{5880}{10000}}{\frac{9680}{10000}} = \frac{147}{242} = 0,607\ldots.$$

Seule la fraction de la réponse D vaut environ $0,607$. L'énoncé calcule cette probabilité de la façon suivante

$$\begin{aligned} p_E(B_1) &= \frac{p(E \cap B_1)}{p(E)} = \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(E)}{p(E \cap B_1) + p(E \cap B_2)} \text{ (formule des probabilités totales)} \\ &= \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(E)}{p(B_1) \times p_{B_1}(E) + p(B_2) \times p_{B_2}(E)} = \frac{0,6 \times \frac{5880}{6000}}{0,6 \times \frac{5880}{6000} + 0,4 \times \frac{3800}{4000}} \\ &= \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}. \end{aligned}$$

**Deuxième partie**

Soit $t$ un réel positif. $p([0;t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,0005t}$.

**1.** $p([2500;+\infty[) = 1 - p([0;2500[) = e^{-0,0005 \times 2500} = e^{-\frac{2500}{2000}}$.

**2. a.** Soit $t$ un réel positif. Pour $x \in [0,t]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$. Les deux fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0,t]$ et pour $x \in [0,t]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. De plus les fonctions $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0,t]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx &= \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x \times (-e^{-\lambda x})\right]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x}\,dx \\ &= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^t = -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

**b.** Puisque $\lambda > 0$, $e^{-\lambda t}$ tend vers $0$ quand $t$ tend vers $+\infty$. D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées

$$\lim_{t\to+\infty} -te^{-\lambda t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda}(-\lambda t)e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}\lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0.$$

Donc

$$E = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0005} = 2000.$$

## EXERCICE 4

**1) a.** Soit $x$ un réel. On a $[f'(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2$ et donc $[f'(x)]^2 \geq 1$. En particulier $f'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) \neq 0.}$$

**b.** Puisque $f'(0) = 1$, on a $[f(0)]^2 = [f'(0)]^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ et donc

$$\boxed{f(0) = 0.}$$

**2.** Puisque $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto [f'(x)]^2 - [f(x)]^2$ l'est aussi. En dérivant l'égalité (1), on obtient alors pour tout réel $x$ : $2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0$ ou encore $2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$. Mais d'après la question précédente, pour tout réel $x$, on a $f'(x) \neq 0$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f''(x) = f(x).}$$

**3. a.** $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

$$\boxed{u(0) = 1 \text{ et } v(0) = 1.}$$

**b.** Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus, d'après la question précédente

$$u' = (f')' + f' = f'' + f' = f + f' = u,$$

et

$$v' = f'' - f' = f - f' = -(f' - f) = -v.$$

$$\boxed{u' = u \text{ et } v' = -v.}$$

**c.** On sait alors qu'il existe deux réels $C_1$ et $C_2$ tels que pour tout réel $x$, $u(x) = C_1e^x$ et $v(x) = C_2e^{-x}$. Pour $x = 0$, on obtient $C_1 = u(0) = 1$ et $C_2 = v(0) = 1$. Finalement

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ u(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^{-x}.}$$

**d.** Ainsi, pour tout réel $x$, $f'(x) + f(x) = e^x$ et $f'(x) - f(x) = e^{-x}$. On retranche membre à membre ces deux égalités et on obtient $(f'(x) + f(x)) - (f'(x) - f(x)) = e^x - e^{-x}$ ou encore $2f(x) = e^x - e^{-x}$ ou enfin $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.}$$

**4. a.** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

**b.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $f'$ est elle-même strictement positive sur $\mathbb{R}$ et par suite, la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**5.** **a.** f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel $m$ de l'intervalle $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$, l'équation $f(x) = m$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m\text{, l'équation } f(x) = m \text{ admet une solution unique } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

**b.** Soit $x$ un réel.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 6 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 6e^x \ (\text{car } e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6(e^x) - 1 = 0 \ (E). \end{aligned}$$

Résolvons maintenant l'équation $X^2 - 6X - 1 = 0$ $(E')$. Soit $\Delta$ le discriminant de cette équation.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) = 40 = (2\sqrt{10})^2.$$

L'équation $(E')$ admet donc deux solutions (réelles) distinctes $X_1 = \dfrac{6 + 2\sqrt{10}}{2} = 3 + \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 - \sqrt{10}$. Par suite, pour tout réel $x$,

$$(e^x)^2 - 6(e^x) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 + \sqrt{10} \text{ ou } e^x = 3 - \sqrt{10}.$$

Mais $10 > 9$ et donc $\sqrt{10} > 3$ puis $3 - \sqrt{10} < 0$. Ainsi, $x$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si $e^x = 3 + \sqrt{10}$ ce qui équivaut encore à $x = \ln(3 + \sqrt{10})$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } f(x) = 3 \text{ est } \ln(3 + \sqrt{10}) \text{ ou encore } 1,81 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$