BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Pondichéry

EXERCICE 1

1. a) $u_1 = \dfrac{1}{2-u_0} = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$ puis $u_2 = \dfrac{1}{2-u_1} = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ et enfin $u_3 = \dfrac{1}{2-u_2} = \dfrac{1}{2-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{2}{3} \text{ et } u_3 = \frac{3}{4}.}$$

b) $w_0 = 0 = u_0$. $w_1 = \dfrac{1}{2} = u_1$, $w_2 = \dfrac{2}{3} = u_2$ et $w_3 = \dfrac{3}{4} = u_3$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

- D'après ce qui précéde, l'égalité est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = w_n$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{n}{n+1}.}$$

2) a) $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\ln(4)$.

$$\boxed{v_1 + v_2 + v_3 = -\ln(4).}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n-1} \times \frac{n}{n} \times \frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= -\ln(n+1). \end{aligned}$$

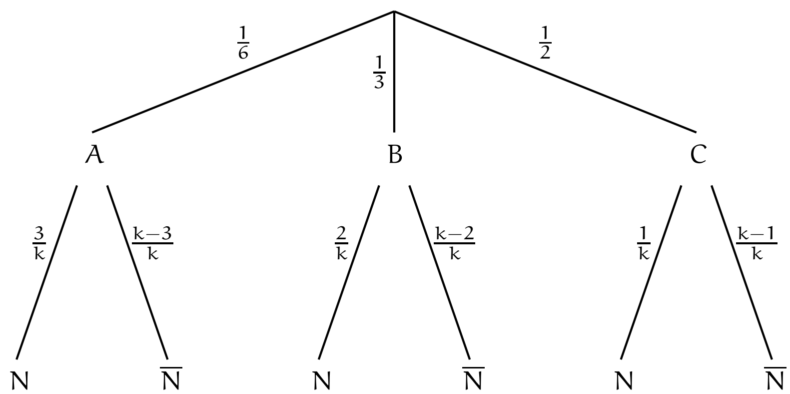
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ S_n = -\ln(n+1),}$$

et en particulier

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty.}$$

EXERCICE 2

1. **a)** Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(N) &= p(N\cap A)+p(N\cap B)+p(N\cap C) = p(A)\times p_A(N)+p(B)\times p_B(N)+p(C)\times p_C(N) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{3}{k}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{k}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{k} = \frac{1}{2k}+\frac{2}{3k}+\frac{1}{2k} = \frac{1}{k}+\frac{2}{3k} = \frac{5}{3k}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(N) = \frac{5}{3k}.}$$

b) La probabilité demandée est $p_N(A)$. Or

$$p_N(A) = \frac{p(A\cap N)}{p(N)} = \frac{p(A)\times p_A(N)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{1}{2k}\times\frac{3k}{5} = \frac{3}{10}.$$

$$\boxed{p_N(A) = \frac{3}{10}.}$$

On peut noter que cette dernière probabilité ne dépend pas de k.

c) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$p(N)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{3k}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3k}{5}\leq 2\Leftrightarrow k\leq\frac{10}{3}\Leftrightarrow k\leq 3 \text{ (car } k \text{ est un entier)}.$$

Finalement la probabilité de l'événement N est supérieure à $\frac{1}{2}$ si et seulement si $k\leq 3$.

$$\boxed{p(N)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\leq 3.}$$

d) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$p(N)=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\frac{5}{3k}=\frac{1}{30}\geq k=\frac{30\times 5}{3}\Leftrightarrow k=50.$$

$$\boxed{p(N)=\frac{1}{30}\Leftrightarrow k=50.}$$

2. Notons X le nombre de boules noires obtenues. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 20 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est noire » avec une probabilité $p = \frac{1}{30}$ ou « la boule tirée n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{29}{30}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{30}$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 0,492 \text{ arrondie à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 3

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1. a) Déterminons la limite de φ en $-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^{-x} = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty.}$$

Déterminons la limite de φ en $+\infty$. Pour tout réel x on a

$$\varphi(x) = x^2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - 1 = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + e^{-x} - 1.$$

Déjà on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + e^{-x} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = -1.}$$

b) Les deux fonctions $x \mapsto x^2+x+1$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto (x^2+x+1)e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction φ. De plus, pour tout réel x on a

$$\varphi'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)(-e^{-x}) = e^{-x}(2x+1-x^2-x-1) = (-x^2+x)e^{-x}.$$

Puisque pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$, la fonction φ' est du signe du trinôme $x \mapsto -x^2+x = x(1-x)$. On en déduit que la fonction φ' est strictement négative sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, strictement positive sur $]0, 1[$ et s'annule en 0 et en 1.

Tableau de variation de φ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}-1$	$\searrow$	-1

2. On note déjà que $\varphi(0) = 0$.
Ensuite φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1]$. Mais alors, pour tout réel x non nul et élément de $]-\infty, 1]$, on a $\varphi(x) > \varphi(0)$ ou encore $\varphi(x) > 0$. En particulier, pour tout réel x non nul et élément de $]-\infty, 1]$, on a $\varphi(x) \neq 0$.

La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $\varphi(1) = \frac{3}{e} - 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = -1$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x), \varphi(1)]$ c'est-à-dire $]-1, \frac{3}{e}-1]$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On note alors que $e < 3$ et donc que $\frac{3}{e} - 1 > 0$. Ainsi 0 est élément de l'intervalle $]-1, \frac{3}{e} - 1]$. Finalement

$$\boxed{\text{l'équation } \varphi(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions dans } \mathbb{R} \text{ à savoir } 0 \text{ et un certain réel } \alpha \text{ élément de } [1, +\infty[.}$$

La machine fournit $\varphi(1,79) = 0,0007\ldots > 0$ et $\varphi(1,8) = -0,001\ldots < 0$ ce qui s'écrit encore $\varphi(1,79) > \varphi(\alpha) > \varphi(1,8)$. Puisque la fonction φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,79 < \alpha < 1,8}$$

et puisque $1,8 - 1,79 = 10^{-2}$, on a fourni un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. D'après la question précédente, φ est strictement positive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$. D'autre part, φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et donc, si x est un réel tel que $1 \leq x < \alpha$, on a $\varphi(x) > \varphi(\alpha)$ ou encore $\varphi(x) > 0$ et si $x > \alpha$, on a $\varphi(x) < 0$.

On résume ces différents résultats dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

1. $f(0) = (2 \times 0 + 1)e^{-0} = 1$ et $g(0) = \dfrac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = 1$.

Donc les courbes C_f et C_g passent par le point A de coordonnées $(1, 0)$.

Ensuite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 2e^{-x} + (2x+1)(-e^{-x}) = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (-2x+1)e^{-x}.$$

D'autre part, pour tout réel x on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$. En particulier, pour tout réel x, on a $x^2 + x + 1 \neq 0$.

On en déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x, on a

$$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Mais alors $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$. Ainsi les tangentes aux courbes C_f et C_g au point A ont même coefficient directeur et sont donc une seule et même droite à savoir la droite d'équation $y = x + 1$.

$$\boxed{\text{Les courbes } C_f \text{ et } C_g \text{ passent par } A(1,0) \text{ et admettent la même tangente en ce point.}}$$

2. a) Soit x un réel.

$$f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)\left(e^{-x} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) = (2x+1)\frac{(x^2+x+1)e^{-x} - 1}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}.}$$

b) On a vu à la question précédente que pour tout réel x on a $x^2 + x + 1 > 0$. Mais alors, pour tout réel x, $f(x) - g(x)$ est du signe de $(2x+1)\varphi(x)$. Le signe de la fonction φ ayant été étudié à la question A.3., on peut remplir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

c) On en déduit que C_f est strictement au-dessous de C_g sur $]-\infty, -\dfrac{1}{2}[$ et sur $]\alpha, +\infty[$, strictement au-dessus sur $]-\dfrac{1}{2}, 0[$ et sur $]0, 1[$ puis que C_f et C_g se coupent aux points de coordonnées $(-\dfrac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$ et $(\alpha, f(\alpha))$.

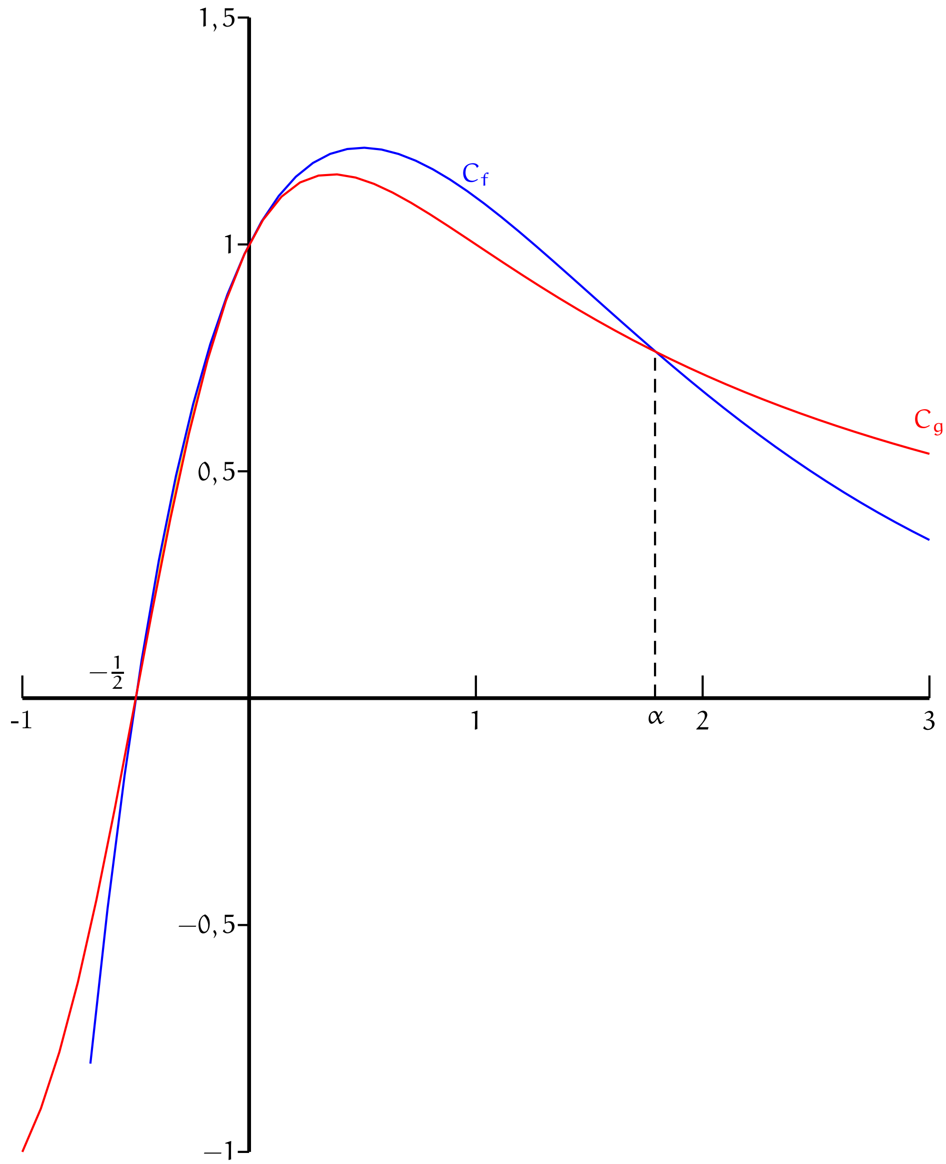
3. **a)** Puisque pour tout réel x on a $x^2+x+1>0$, la fonction $x \mapsto \ln(x^2+x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction h. De plus pour tout réel x,

$$h'(x) = -2e^{-x}+(-2x-3)(-e^{-x})-\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = (-2+2x+3)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x)-g(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est une primitive de la fonction } f-g \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) D'après la question 2.c), pour x élément de $[-\frac{1}{2},0]$ on a $f(x)-g(x)\geq 0$. Par suite

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(f(x)-g(x))\,dx = [h(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left[(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}\\ &= (-3e^0-\ln(1))-(-2e^{\frac{1}{2}}-\ln\left(\frac{3}{4}\right)) = -3-\ln\left(\frac{4}{3}\right)+2e^{\frac{1}{2}} = 0,0098 \text{ unité d'aire arrondie à } 10^{-4}.\end{aligned}$$



EXERCICE 4
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} = y_A(y_B - y_A) + z_A(z_B - z_A) = 5(0-5) + 5(10-5) = -25 + 25 = 0$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ce qui démontre que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ (en A).

2. **a)** On note H_0 le projeté orthogonal du point A sur l'axe (Oz). H_0 est le point de coordonnées $(0, 0, 5)$. On a $OH_0 = 5$ et $H_0A = \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2 + (5-5)^2} = 5$ puis $\dfrac{H_0A}{OH_0} = 1$.

Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z). On note encore H le projeté orthogonal du point M sur l'axe (Oz).

- Si M est un point du plan (xOy), M appartient à Γ si et seulement si $M = O$.
- Si M n'est pas un point du plan (xOy), alors $H \neq 0$ et M appartient à Γ si et seulement si $\dfrac{MH}{0H} = \dfrac{AH_0}{OH_0}$ ou encore $MH = OH$.
  Maintenant, si M appartient au plan (xOy), l'égalité $MH = OH$ équivaut à $MO = 0$ ou encore $M = O$.

En résumé,

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow HM = OH \Leftrightarrow HM^2 = OH^2 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = (0-0)^2 + (0-0)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2.$$

$$\boxed{\text{Le cône } \Gamma \text{ admet pour équation } x^2 + y^2 = z^2.}$$

b) Déterminons une équation de la sphère $\mathscr{S}$. Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{S} &\Leftrightarrow BM^2 = BA^2 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-10)^2 = (0-0)^2 + (5-0)^2 + (5-10)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 50 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0. \end{aligned}$$

Déterminons alors l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du cône Γ. Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \cap \mathscr{S} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ z^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2 - 10z + 25 = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (z-5)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 5 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Maintenant, la surface d'équation $z = 5$ est un plan parallèle au plan (xOy) et on sait que la section d'un cône de révolution d'axe (Oz) par un plan parallèle au plan (xOy) et ne passant pas par le sommet de ce cône est un cercle.

$$\boxed{\Gamma \cap \mathscr{S} \text{ est le cercle de centre } H_0(0, 0, 5) \text{ et de rayon } 5 \text{ du plan d'équation } z = 5.}$$

c) Voir figure à la fin.

3. On sait que la section d'un cône de révolution d'axe (Oz) par un plan parallèle à l'axe (Oz) et ne contenant pas l'axe de ce cône est une hyperbole. La figure représentant l'intersection du cône Γ et du plan P_1 est donc la figure 3.

$$\boxed{\Gamma \cap \mathscr{S} \text{ est une hyperbole.}}$$

4. Soit n un entier relatif. Si n est un entier impair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$. Mais alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ce qui impose $n \equiv 1$ (modulo 4). Mais si n est un entier pair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$ et dans ce cas, $n^2 = 4k$ et donc $n^2 \equiv 0$ (modulo 4).

Soient alors x, y et z trois entiers relatifs tels que x et y soient simultanément impairs.
D'après ce qui précède, $x^2 + y^2 \equiv 2$ (modulo 4) alors que $z^2 \equiv 0$ (modulo 4) ou $z^2 \equiv 1$ (modulo 4). On ne peut donc avoir $x^2 + y^2 = z^2$.

Finalement, si $M(x, y, z)$ est un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs, x et y ne peuvent être simultanément impairs.