

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT de SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

- 1) On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
 - a) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
 - b) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
 - c) On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT. En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

- 2) Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0; 1]$. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 30 min ?

- 3) Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
Quelle est la probabilité que, sur 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 2 + i, \quad z_B = 1 + 2i, \quad z_C = 6 + 3i, \quad z_D = -1 + 6i.$$

- 1) Représenter les points A, B, C et D .
- 2) Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.
Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
- 3) Soit J le point d'affixe $3 + 5i$.
Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B .
- 4) On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.
- 5) On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.
 - a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q .
 - b) Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles (\vec{IA}, \vec{IP}) et (\vec{IC}, \vec{IQ}) . En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
 - c) En déduire que J est l'image de M par g . Que peut-on en déduire pour J ?

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

1) Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x .

a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k ,

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}.$$

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k ,

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2) a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1.$$

(on pourra écrire $\frac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n - 1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}.$$

et (\mathcal{C}) sa représentation graphique dans un repère du plan.

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et sa limite en $-\infty$.
- 2) Calculer, pour tout réel x , $f(x) + f(-x)$. Que peut-on en déduire pour le point $A(0; 1 + \ln 4)$?
- 3) Etudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
- 4)
 - a) Justifier que, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans \mathbb{R} .
 - b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution a de l'équation $f(x) = 3$. Justifier la réponse.
 - c) Pour quelle valeur de m le nombre $-a$ est-il solution de l'équation $f(x) = m$?
- 5)
 - a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
 - b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ sont des asymptotes de la courbe (\mathcal{C}) .
Etudier la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à son asymptote (Δ) .
- 6)
 - a) On considère un réel positif α .
Que représente l'intégrale : $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - x - \ln 4] dx$?
 - b) Montrer que $I(\alpha) = 2 \ln \left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} \right)$. (On pourra utiliser le résultat de la question 5a)).
 - c) Calculer α pour que $I(\alpha) = 1$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.