BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Centres étrangers

EXERCICE 1

1.

$$a' = -2\overline{a} + 2i = -2(2i) + 2i = -2i,$$

et

$$b' = -2\overline{b} + 2i = -2(3+2i) + 2i = -6 - 2i.$$

$$\boxed{a' = a = -2i \text{ et } b' = -6 - 2i.}$$

2. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = -2(x - iy) + 2i = -2x + i(2y + 2).$$

Ainsi, M' est le point de coordonnées (x', y') où $x' = -2x$ et $y' = 2y + 2$. Mais alors, si le point M appartient à la droite (Δ) alors $y = -2$ et donc $y' = 2(-2) + 2 = -2$ ce qui montre que le point M' appartient aussi à la droite (Δ).

$$\boxed{\text{Si le point } M \text{ appartient à la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = -2, \text{ le point } M' \text{ appartient à } (\Delta).}$$

3. Soit z un nombre complexe.

$$|z' + 2i| = |-2\overline{z} + 4i| = |-2(\overline{z} - 2i)| = |-2| \times |\overline{z} - 2i| = 2\left|\overline{z + 2i}\right| = 2|z + 2i|.$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ d'affixe } z, \text{ on a } |z' + 2i| = 2|z + 2i|.}$$

Géométriquement, cela signifie que $AM' = 2AM$.

4. a. On sait qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ est $\arg(z - z_A)$ ou encore $\arg(z + 2i)$ c'est-à-dire θ.
b. Soit z un nombre complexe.

$$(z + 2i)(z' + 2i) = (z + 2i)(-2\overline{z} + 4i) = -2(z + 2i)(\overline{z} - 2i) = -2(z + 2i)\overline{(z + 2i)} = -2|z + 2i|^2,$$

et comme $|z + 2i|^2$ est un réel positif ou nul, on a montré que

$$\boxed{(z + 2i)(z' + 2i) \text{ est un réel négatif ou nul.}}$$

c. Soit z un nombre complexe. Si $z = -2i$, la question 1. montre que $z' = -2i$. Réciproquement, si $z' = -2i$, alors $(z + 2i)(z' + 2i) = 0$ puis $-2|z + 2i|^2 = 0$ puis $z + 2i = 0$ et donc $z = -2i$. Finalement,

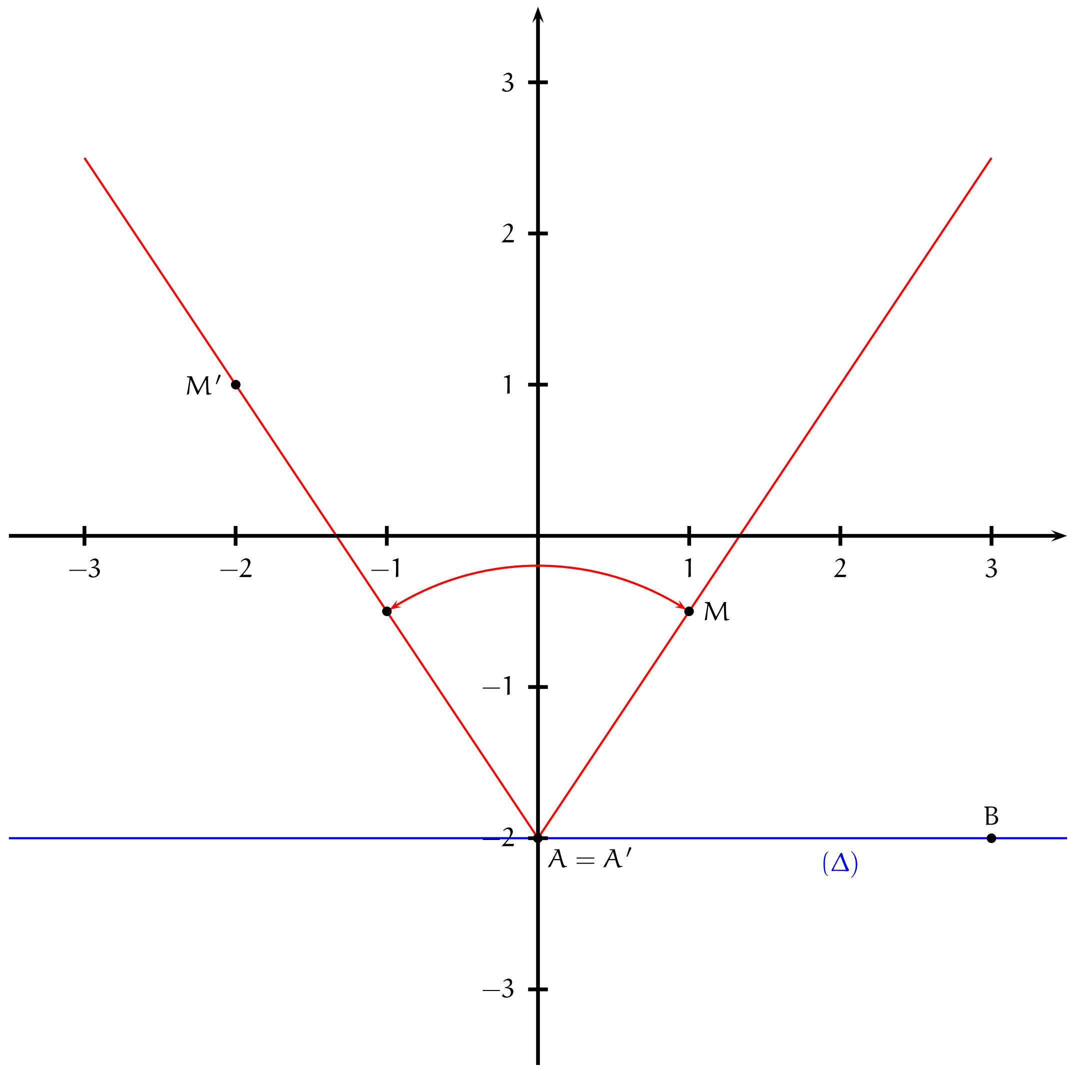
$$\text{pour tout nombre complexe } z, \ (z = -2i \Leftrightarrow z' = -2i).$$

Dans cette question, $M \neq A$ et donc $z \neq -2i$. Puisque $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel strictement négatif, on a $\arg(z+2i)(z'+2i) = \pi\ [2\pi]$ ou encore $\arg(z + 2i) + \arg(z' + 2i) = \pi\ [2\pi]$ ou enfin $\arg(z' + 2i) = \pi - \arg(z + 2i) = \pi - \theta\ [2\pi]$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ \arg(z' + 2i) = \pi - \theta\ [2\pi].}$$

d. Par suite, pour tout point M distinct de A, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ $[2\pi]$. On en déduit que la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est bissectrice des demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ ou encore que les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

5. Si $M = A$, alors $M' = A$. Sinon, un point M distinct de A étant donné, on construit la symétrique de la demi-droite $[AM)$ par rapport à l'axe des ordonnées et M' est le point de cette demi-droite vérifiant $AM' = 2AM$.



EXERCICE 2 (Candidats ayant suivi l'enseignement de Spécialité)

1. 11 est premier. Puisque $111 = 3 \times 37$, 111 n'est pas premier. $1111 = 11 \times 101$ et donc 1111 n'est pas premier.

$$\boxed{N_2 \text{ est premier et } N_3 \text{ et } N_4 \text{ ne le sont pas.}}$$

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. N_p est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10, du rang 0 au rang $p-1$ et on sait que $N_p = \dfrac{10^{p-1+1}-1}{10-1} = \dfrac{10^p-1}{9}$.

$$\boxed{N_p = \frac{10^p-1}{9}.}$$

Puisque N_p est un entier, l'égalité $10^p - 1 = 9N_p$ montre en particulier que $10^p - 1$ est divisible par 9.

3. a. Soient q un entier naturel non nul puis $p = 2q$. D'après la question 2.,

$$N_p = \frac{10^p-1}{9} = \frac{10^{2q}-1}{9}.$$

Puisque $N_2 = \dfrac{10^2-1}{9}$, on a $10^2 = 1 + 9 \times N_2$ ce qui impose en particulier $10^2 \equiv 1$ (modulo $9N_2$).
Mais alors, puisque $10^{2q} - 1 = (10^2)^q - 1$, on a $10^{2q} - 1 \equiv 1^q - 1$ (modulo $9N_2$) ou encore $10^{2q} - 1 \equiv 0$ (modulo $9N_2$).
L'entier $10^{2q} - 1$ est donc un multiple de $9N_2$ et finalement $\dfrac{10^{2q}-1}{9}$ est un multiple de N_2.

$$\boxed{\text{Si } p = 2q \text{ où } q \text{ est un entier naturel non nul, alors } N_p \text{ est divisible par } N_2.}$$

b. Soient q un entier naturel non nul puis $p = 3q$.
Puisque $N_3 = \dfrac{10^3-1}{9}$, on a $10^3 = 1 + 9 \times N_3$ ce qui impose en particulier $10^3 \equiv 1$ (modulo $9N_3$).
Mais alors, puisque $10^{3q} - 1 \equiv 1^q - 1$ (modulo $9N_3$) ou encore $10^{3q} - 1 \equiv 0$ (modulo $9N_3$). L'entier $10^{3q} - 1$ est donc un multiple de $9N_3$ et finalement $\dfrac{10^{3q}-1}{9}$ est un multiple de N_3.

$$\boxed{\text{Si } p = 3q \text{ où } q \text{ est un entier naturel non nul, alors } N_p \text{ est divisible par } N_3.}$$

c. Soient q et k deux entiers naturels non nuls puis $p = kq$. D'après la question 2., $N_p = \dfrac{10^p-1}{9} = \dfrac{10^{kq}-1}{9}$.
Puisque $N_k = \dfrac{10^k-1}{9}$, on a $10^k = 1 + 9 \times N_k$ ce qui impose en particulier $10^k \equiv 1$ (modulo $9N_k$).
Mais alors, puisque $10^{kq} - 1 \equiv 0$ (modulo $9N_k$). L'entier $10^{kq} - 1$ est donc un multiple de $9N_k$ et finalement $\dfrac{10^{kq}-1}{9}$ est un multiple de N_k.

$$\boxed{\text{Si } p = kq \text{ où } q \text{ et } k \text{ sont deux entiers naturels non nuls, alors } N_p \text{ est divisible par } N_k.}$$

4. Si p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et non premier, il existe deux entiers naturels q et k tels que $p = kq$ et $1 < k < p$ et $1 < q < p$. D'après la question 2.c., l'entier N_k divise l'entier N_p. Maintenant, on a $k > 1$ et donc $N_k > 2$. D'autre part, $k < p$ et donc $\underbrace{11\ldots1}_{k} < \underbrace{11\ldots1}_{p}$ ou encore $N_k < N_p$. Finalement, N_k est un diviseur de N_p qui est strictement compris entre 1 et N_p. L'entier N_p n'est donc pas premier.

$$\boxed{\text{Pour que } N_p \text{ soit premier, il est nécessaire que } p \text{ soit un nombre premier.}}$$

La condition ci-dessus n'est pas suffisante car l'entier 3 est premier mais l'entier N_3 ne l'est pas d'après la question 1..

EXERCICE 3

I. Première partie

1. $g(0) = 0 \times e^{-1} = 0$ et $g(1) = 1 \times e^0 = 1$. D'autre part la fonction g est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel x de $[0;1]$,

$$g'(x) = e^{x-1} + x \times e^{x-1} = (1+x)e^{x-1}.$$

Pour tout réel x de $[0;1]$, on a $1+x \geq 0$ et $e^{x-1} \geq 0$ et donc $g'(x) \geq 0$. Par suite, la fonction g est croissante sur $[0;1]$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie les conditions (1) et (2).}}$$

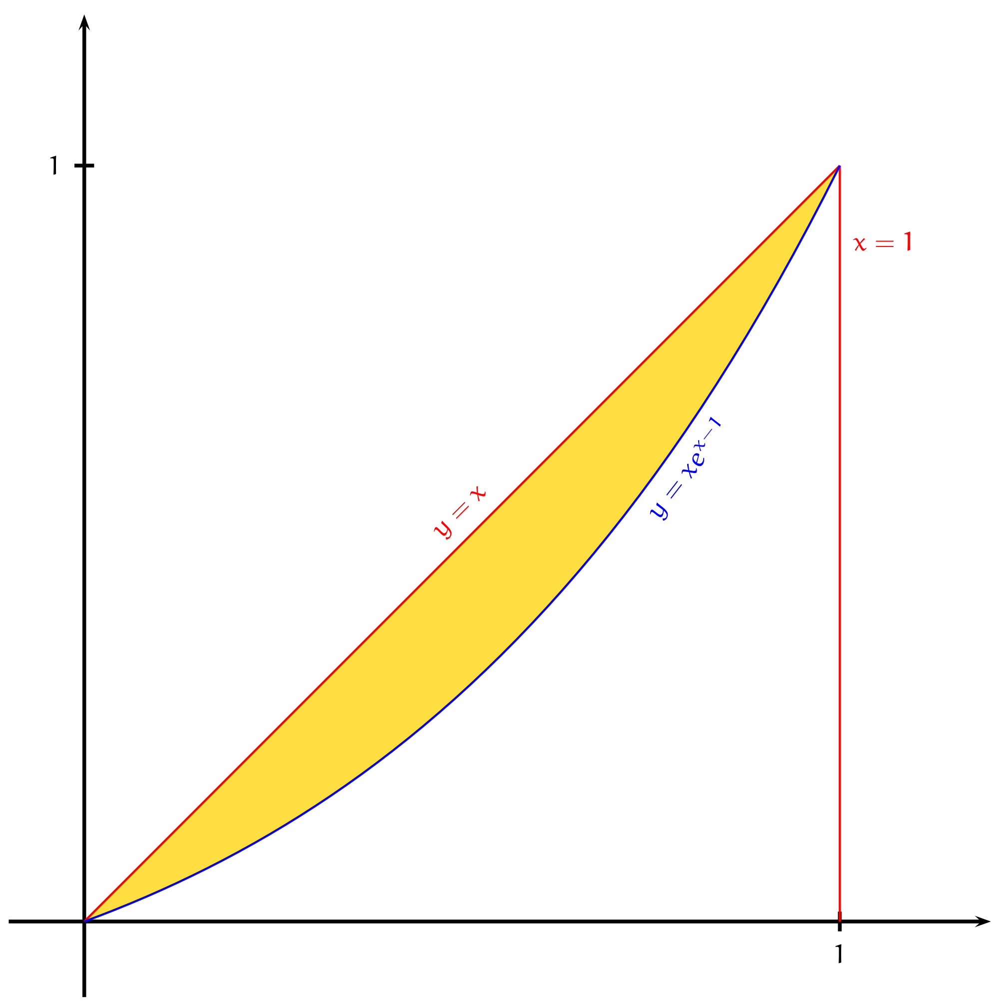
2. Soit x un réel élément de $[0;1]$.

$$g(x) - x = xe^{x-1} - x = x(e^{x-1} - 1) = x(\frac{e^x}{e} - 1) = x\frac{e^x - e}{e} = \frac{x}{e}(e^x - e).$$

Soit x un réel élément de $[0;1]$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^x \leq e^1$ ou encore $e^x \leq e$ et donc $e^x - e \leq 0$. D'autre part, $\frac{x}{e} \geq 0$ et finalement $\frac{x}{e}(e^x - e) \leq 0$.
Ainsi, pour tout réel x de $[0;1]$, $g(x) - x \leq 0$ ou encore $g(x) \leq x$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie la condition (3).}}$$

3.



II. Seconde partie

1. Par hypothèse, pour tout réel x de $[0;1]$, on a $f(x) \leq x$. On sait alors que l'aire du domaine considéré, exprimée en unité d'aire, est $\displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\ dx$.

2. Calculons tout d'abord $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 xe^{x-1}\ dx$.

Pour x réel élément de $[0;1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel x de $[0;1]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{x-1}$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x-1}\ dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1}\ dx = (1 \times e^0 - 0 \times e^{-1}) - \left[e^{x-1}\right]_0^1 \\ &= 1 - (e^0 - e^{-1}) = e^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Mais alors, par linéarité de l'intégrale,

$$I_g = \int_0^1 [x - g(x)]\ dx = \int_0^1 x\ dx - \int_0^1 xe^{x-1}\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{I_g = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.}$$

3. **a.** Soit n un entier naturel. Par linéarité de l'intégrale on a

$$I_n = \int_0^1 [x - f_n(x)]\ dx = \int_0^1 x\ dx - \int_0^1 f_n(x)\ dx = \frac{1}{2} - u_n.$$

b. Soit n un entier naturel.

Soit t un réel de $[0;1]$. On a $t \leq 1$ et donc, puisque $t^n \geq 0$, on a $t^n \times t \leq t^n \times 1$ ou encore $t^{n+1} \leq t^n$. Puisque $\dfrac{2}{1+t} \geq 0$, on obtient finalement $\dfrac{2t^{n+1}}{1+t} \leq \dfrac{2t^n}{1+t}$.

Ainsi, pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\dfrac{2t^{n+1}}{1+t} \leq \dfrac{2t^n}{1+t}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^{n+1}}{1+t}\ dt \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c. Soit n un entier naturel.

Soit t un réel élément de $[0;1]$. On a d'une part $\dfrac{1}{1+t} \geq 0$ et d'autre part, $\dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1+t}{1+t}$ ou encore $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$. En résumé, $0 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$. Puisque $t^n \geq 0$, après multiplication des trois membres de cet encadrement par t^n, on obtient

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

d. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\dfrac{2t^n}{1+t} \geq 0$ et donc, par positivité de l'intégrale on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt \geq 0$. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a aussi $\dfrac{2t^n}{1+t} \leq 2t^n$ et donc, par croissance de l'intégrale on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt \leq \int_0^1 2t^n\ dt$ avec

$$\int_0^1 2t^n\ dt = 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}.$$

Finalement $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt \leq \frac{2}{n+1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}.}$$

e. Puisque $\frac{2}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}.}$$

