

EXERCICE 1

A - Lecture graphique

1. Soit k un réel. Une lecture graphique nous apprend que
 - si $k < 0$ ou $k > 1$, l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution dans $[0, +\infty[$,
 - si $0 < k < 1$, l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions dans $[0, +\infty[$,
 - Si $k = 0$ ou si $k = 1$, l'équation $f(x) = k$ admet exactement une solution dans $[0, +\infty[$.
2. Soit n un entier naturel. $0 < \frac{1}{n} < 1$ équivaut à $n > 1$ ou encore $n \geq 2$. Donc, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes si et seulement si $n \geq 2$.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $[f(1), f(0)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 1]$. Maintenant, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et puisque n est supérieur ou égal à 2, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ ou encore $f(1) \leq \frac{1}{n} \leq f(0)$. On en déduit que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule solution notée u_n dans l'intervalle $[0, 1]$.
De même, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et donc pour tout réel k de l'intervalle $[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ c'est-à-dire l'intervalle $[0, 1[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
Comme $0 \leq \frac{1}{n} < 1$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule solution notée v_n dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

2. Voir graphique à la fin de l'exercice.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a $f(u_n) = \frac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, on a $f(u_{n+1}) < f(u_n)$. Comme f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et que u_n et u_{n+1} sont éléments de $[0, 1]$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $u_n < u_{n+1}$ et donc

la suite (u_n) est strictement croissante.

De même, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, $f(v_{n+1}) < f(v_n)$ et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et que les réels v_n et v_{n+1} sont éléments de cet intervalle, on a $v_{n+1} < v_n$.

La suite (v_n) est strictement décroissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. Puisque, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 1$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leq \ell \leq 1$.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $f(u_n) = \frac{1}{n}$ (*). La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et en particulier en ℓ . Par suite, quand n tend vers $+\infty$, $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient alors $f(\ell) = 0$. Mais l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, 1]$ à savoir $x = 1$. Par suite, $\ell = 1$.

La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 1. Donc la suite (v_n) converge vers un réel ℓ' de $[1, +\infty[$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $f(v_n) = \frac{1}{n}$, on obtient $f(\ell') = 0$ et donc $\ell' = 1$.

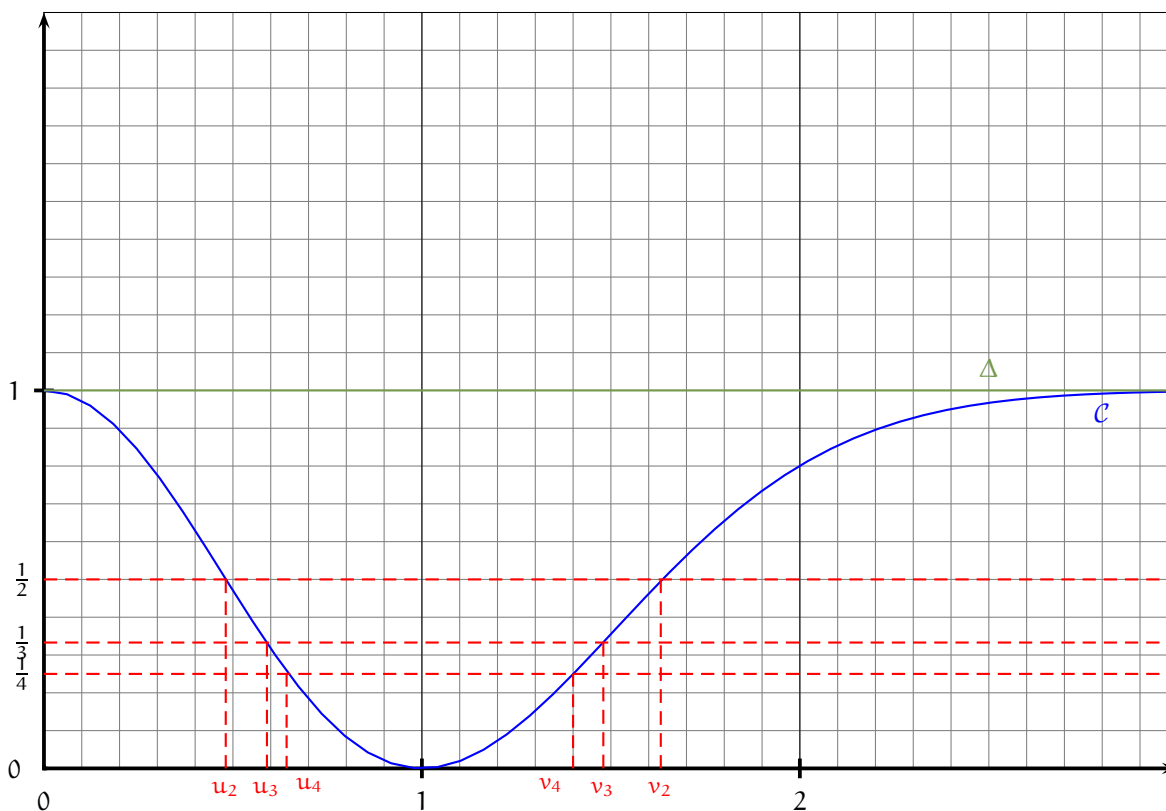
La suite (v_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Ainsi,

- la suite (u_n) est croissante,
- la suite (v_n) est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 1 - 1 = 0$.

On en déduit que

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.



EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $z'_B = \frac{i(1+i)+2}{(1+i)-i} = 1+i$ et $z'_C = \frac{i(-1+i)+2}{(-1+i)-i} = \frac{1-i}{-1} = -1+i$. Donc

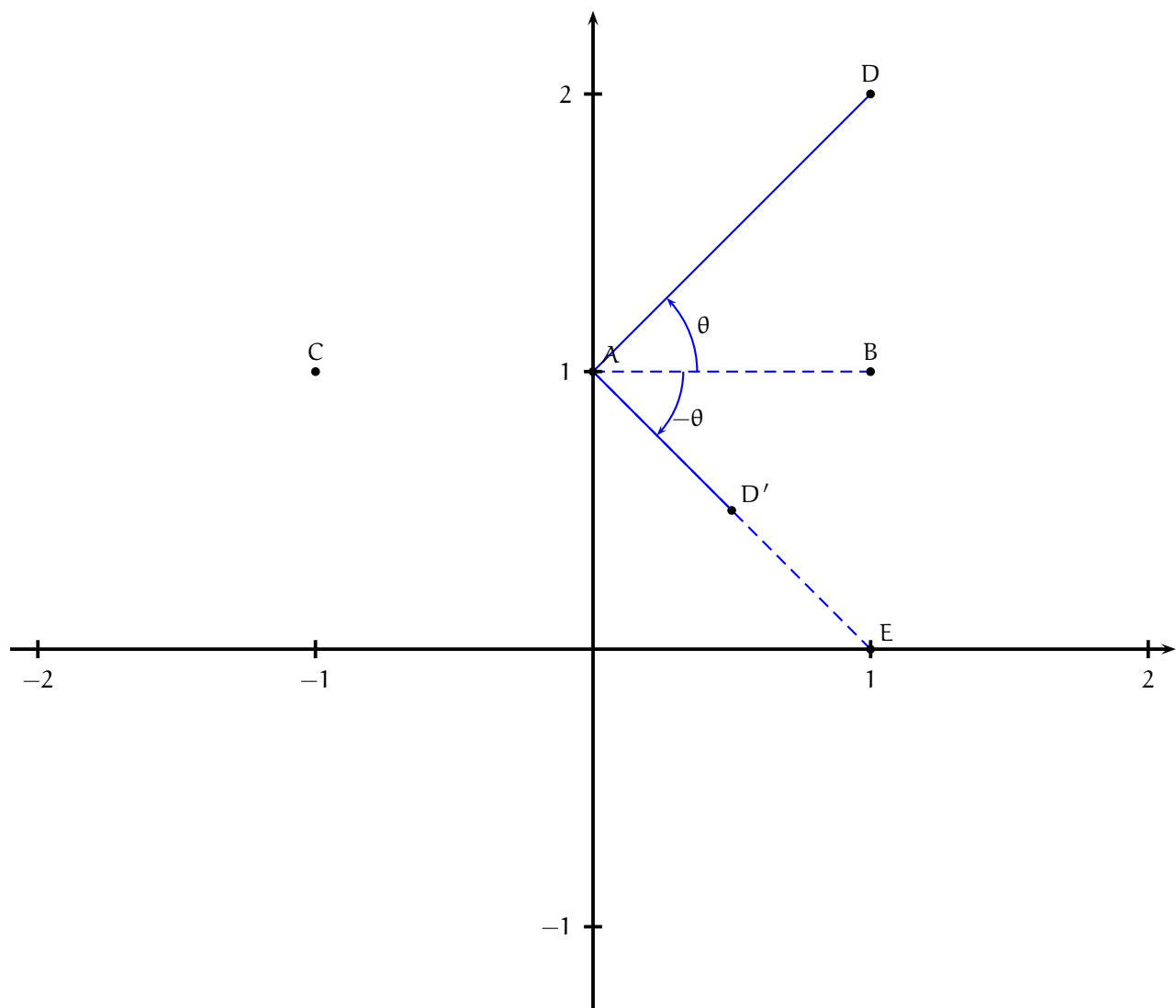
$$f(B) = B \text{ et } f(C) = C.$$

b. Soit z un nombre complexe distinct de i .

$$(z' - i)(z - i) = \left(\frac{iz + 2}{z - i} - i \right) (z - i) = (iz + 2) - i(z - i) = iz + 2 - iz - 1 = 1.$$

$$\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ distinct de } i, (z' - i)(z - i) = 1.$$

c.



Notons E le point d'affixe 1. L'égalité $(z'_D - i)(z_D - i) = 1$ fournit $\arg(z'_D - i) + \arg(z_D - i) = \arg(1) = 0$ (à $2k\pi$ près), $k \in \mathbb{Z}$ puis

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) \text{ à } 2k\pi \text{ près } k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, l'égalité d'angles précédente signifie que la demi-droite $[AD')$ est la symétrique de la demi-droite $[AD)$ par rapport à la droite (AB) .

Mais d'autre part, E est la symétrique de B par rapport à la droite (AB) et donc la symétrique de la demi-droite $[AD)$ par rapport à la droite (AB) est aussi la demi-droite $[AE)$. En résumé, $[AD') = [AE)$ ce qui signifie que le point D' est sur la demi-droite $[AE)$.

On a aussi $|z'_D - i| \times |z_D - i| = 1$ puis $AD' \times AD = 1$ et donc $AD' = \frac{1}{AD}$. Comme AD est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on a $AD = \sqrt{2}$ et donc $AD' = \frac{1}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AE$. Par suite

D' est le milieu du segment $[AE)$.

2. Soit R un réel strictement positif. Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixes $i + Re^{i\theta}$ où θ décrit \mathbb{R} .

Soit donc θ un réel. Posons $z = i + Re^{i\theta}$. D'après la question 1.b., on a $(z' - i)(z - i) = 1$. mais alors $(z' - i) \times Re^{i\theta} = 1$ puis $z' - i = \frac{1}{R}e^{-i\theta}$ et finalement

$$z' = i + \frac{1}{R}e^{-i\theta}.$$

Maintenant, quand θ décrit \mathbb{R} , $-\theta$ décrit \mathbb{R} et donc

l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{R}$.

3. a. Soient y un réel distinct de 1 puis $z = iy$. Alors

$$z' = \frac{i(iy) + 2}{iy - i} = \frac{1}{i} \times \frac{-y + 2}{y - 1} = -i \frac{-y + 2}{y - 1} = i \frac{y - 2}{y - 1},$$

et z' est bien un imaginaire pur. On en déduit que

l'image par f de la droite (Oy) privée du point A est contenue dans la droite (Oy) .

b. Notons \mathcal{D}_1 la droite \mathcal{D} privée de A . Les points de \mathcal{D}_1 sont les points de coordonnées $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}^*$, ou encore les points d'affixes $x + i$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Soient donc x un réel non nul puis $z = x + i$. On a $z' - i = \frac{1}{z - i} = \frac{1}{x}$ puis

$$z' = \frac{1}{x} + i.$$

Maintenant, on sait que quand x décrit \mathbb{R}^* , $\frac{1}{x}$ décrit \mathbb{R}^* . Les points de $f(\mathcal{D}_1)$ sont les points d'affixes $x' + i$, $x' \in \mathbb{R}^*$ ou encore les points de coordonnées $(x', 1)$, $x' \in \mathbb{R}^*$. Finalement

l'image par f de la droite \mathcal{D} privée de A est la droite \mathcal{D} privée de A .

EXERCICE 3

- I.1. C
I.2. D
II.1. A
II.2.a. B
II.2.b. B

Explications.

Première partie

1. Notons X le nombre d'étiquettes comportant une adresse erronée. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'étiquette comporte une adresse erronée » avec une probabilité $p = \frac{120}{6000}$ ou « l'étiquette comporte une adresse exacte » avec une probabilité $1 - p = \frac{5880}{6000}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{120}{6000}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$ et on a

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{120}{6000}\right)^3 \left(\frac{5880}{6000}\right)^7.$$

2. Notons E l'événement « l'étiquette comporte une adresse exacte ». La probabilité demandée est $p_E(B_1)$. Il y a $5880 + 3800 = 9680$ étiquettes comportant une adresse exacte et donc $p(E) = \frac{9680}{10000}$. D'autre part, il y a 5880 étiquettes comportant une adresse exacte et provenant de la banque B_1 et donc $p(E \cap B_1) = \frac{5880}{10000}$. Par suite,

$$p_E(B_1) = \frac{p(E \cap B_1)}{p(E)} = \frac{\frac{5880}{10000}}{\frac{9680}{10000}} = \frac{147}{242} = 0,607\dots$$

Seule la fraction de la réponse D vaut environ 0,607. L'énoncé calcule cette probabilité de la façon suivante

$$\begin{aligned} p_E(B_1) &= \frac{p(E \cap B_1)}{p(E)} = \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(E)}{p(E \cap B_1) + p(E \cap B_2)} \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\ &= \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(E)}{p(B_1) \times p_{B_1}(E) + p(B_2) \times p_{B_2}(E)} = \frac{0,6 \times \frac{5880}{6000}}{0,6 \times \frac{5880}{6000} + 0,4 \times \frac{3800}{4000}} \\ &= \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}. \end{aligned}$$

Deuxième partie

Soit t un réel positif. $p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,0005t}$.

1. $p([2500; +\infty]) = 1 - p([0; 2500]) = e^{-0,0005 \times 2500} = e^{-\frac{2500}{2000}}$.

2. a. Soit t un réel positif. Pour $x \in [0, t]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0, t]$ et pour $x \in [0, t]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, t]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx &= \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x} dx = [x \times (-e^{-\lambda x})]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x} dx \\ &= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

b. Puisque $\lambda > 0$, $e^{-\lambda t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -te^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} (-\lambda t)e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^x = 0.$$

Donc

$$E = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0005} = 2000.$$

EXERCICE 4

1) a. Soit x un réel. On a $[f'(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2$ et donc $[f'(x)]^2 \geq 1$. En particulier $f'(x) \neq 0$.

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) \neq 0.$$

b. Puisque $f'(0) = 1$, on a $[f(0)]^2 = [f'(0)]^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ et donc

$$f(0) = 0.$$

2. Puisque f' est dérivable sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto [f'(x)]^2 - [f(x)]^2$ l'est aussi. En dérivant l'égalité (1), on obtient alors pour tout réel x : $2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0$ ou encore $2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$. Mais d'après la question précédente, pour tout réel x , on a $f'(x) \neq 0$ et donc

$$\text{pour tout réel } x, f''(x) = f(x).$$

3. a. $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

$$u(0) = 1 \text{ et } v(0) = 1.$$

b. Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} en tant que sommes de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et de plus, d'après la question précédente

$$u' = (f')' + f' = f'' + f' = f + f' = u,$$

et

$$v' = f'' - f' = f - f' = -(f' - f) = -v.$$

$$u' = u \text{ et } v' = -v.$$

c. On sait alors qu'il existe deux réels C_1 et C_2 tels que pour tout réel x , $u(x) = C_1 e^x$ et $v(x) = C_2 e^{-x}$. Pour $x = 0$, on obtient $C_1 = u(0) = 1$ et $C_2 = v(0) = 1$. Finalement

$$\text{pour tout réel } x, u(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^{-x}.$$

d. Ainsi, pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = e^x$ et $f'(x) - f(x) = e^{-x}$. On retranche membre à membre ces deux égalités et on obtient $(f'(x) + f(x)) - (f'(x) - f(x)) = e^x - e^{-x}$ ou encore $2f(x) = e^x - e^{-x}$ ou enfin $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$\text{Pour tout réel } x, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

4. a. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} , la fonction f' est elle-même strictement positive sur \mathbb{R} et par suite, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} . On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

5. a. f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . On sait alors que pour tout réel m de l'intervalle $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$, l'équation $f(x) = m$ a une solution et une seule dans \mathbb{R} . Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a montré que

Pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} .

b. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 6 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 6e^x \text{ (car } e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6(e^x) - 1 = 0 \text{ (E)}. \end{aligned}$$

Résolvons maintenant l'équation $X^2 - 6X - 1 = 0$ (E'). Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) = 40 = (2\sqrt{10})^2.$$

L'équation (E') admet donc deux solutions (réelles) distinctes $X_1 = \frac{6 + 2\sqrt{10}}{2} = 3 + \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 - \sqrt{10}$. Par suite, pour tout réel x ,

$$(e^x)^2 - 6(e^x) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 + \sqrt{10} \text{ ou } e^x = 3 - \sqrt{10}.$$

Mais $10 > 9$ et donc $\sqrt{10} > 3$ puis $3 - \sqrt{10} < 0$. Ainsi, x est solution de l'équation (E) si et seulement si $e^x = 3 + \sqrt{10}$ ce qui équivaut encore à $x = \ln(3 + \sqrt{10})$.

L'unique solution de l'équation $f(x) = 3$ est $\ln(3 + \sqrt{10})$ ou encore 1,81 à 10^{-2} près par défaut.