BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1) Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2) Soit I le point d'affixe -3.

a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) **a)** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre arg$(z' + 4)$ et arg$(z - 2)$.

b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.
Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3)a)** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

EXERCICE 2 (5 points)

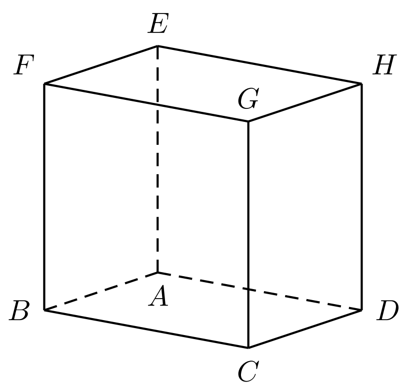
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Les réponses à cet exercice sont à <u>inscrire sur la feuille jointe en annexe</u>. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions, une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses exactes rapportent 1 point et 2 réponses exactes rapportent $1/2$ point.



Soit $ABCDEFGH$ un carré de côté 1.

On choisit le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$.
L est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 3)\}$.
Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1) Les coordonnées de L sont :

a) $(\frac{1}{4}; 0; 0)$ ☐ **b)** $(\frac{3}{4}; 0; 0)$ ☐ **c)** $(\frac{2}{3}; 0; 0)$ ☐

2) Le plan (π) est le plan :

a) (GLE) ☐ **b)** (LEJ) ☐ **c)** (GFA) ☐

3) Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

a) $(1; 0; \frac{1}{4})$ ☐ **b)** $(1; 0; \frac{1}{5})$ ☐ **c)** $(1; 0; \frac{1}{3})$ ☐

4) **a)** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B ☐

b) Les droites (EL) et (IM) sont parallèles ☐

c) Les droites (EL) et (IM) sont sécantes ☐

5) Le volume du tétraèdre $FIJM$ est :

a) $\frac{1}{36}$ ☐ **b)** $\frac{1}{48}$ ☐ **c)** $\frac{1}{24}$ ☐

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.

2) Justifier que pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B :

1) **a)** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Interprétez graphiquement les résultats précédents.

2) **a)** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3) **a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
b) A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).

4) Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ; } v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3) Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).