BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) $z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = 1 - 2i + i^2 - 4 + 4i = -4 + 2i$ et $z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) = 9 + 6i + i^2 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

$$\boxed{z_{A'} = z_{B'} = -4 + 2i.}$$

b) Soient M_1 et M_2 deux points du plan dont les affixes respectives sont notées z_1 et z_2.

$$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow (z_1^2 - z_2)^2 - 4(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow z_2 = z_1 \text{ ou } z_2 = 4 - z_1.$$

Maintenant, si Ω est un point quelconque, l'expression complexe de la symétrie centrale de centre Ω est $z' = 2z_\Omega - z$. Ainsi $z_2 = 4 - z_1$ équivaut à M_2 est l'image de M_1 par la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe 2.

$$\boxed{f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow M_2 = M_1 \text{ ou } M_2 \text{ est l'image de } M_1 \text{ par la symétrie centrale de centre } \Omega(2,0).}$$

2) a) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$OMIM' \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{MO} \Leftrightarrow z' - (-3) = 0 - z \Leftrightarrow z^2 - 4z + 3 = -z$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0.$$

$$\boxed{OMIM' \text{ est un parallélogramme si et seulement si } z^2 - 3z + 3 = 0.}$$

b) Calculons le discriminant de l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 3z + 3 = 0 \text{ sont } \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}.}$$

3) a) Soit z un nombre complexe.

$$z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2.$$

On en déduit que $|z' + 4| = |(z-2)^2| = ||z-2|^2$ et aussi que pour $z \neq 2$, $\arg(z' + 4) = 2\arg(z-2)$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.
b) Soit M un point du cercle de centre J et de rayon 2 dont l'affixe est notée z. L'égalité $MJ = 2$ s'écrit aussi $|z-2| = 2$ et fournit $|z' + 4| = |z-2|^2 = 4$ ou encore $KM' = 4$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est sur le cercle de centre } J \text{ et de rayon 2, } f(M) \text{ est sur le cercle de centre } K \text{ et de rayon 4.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

c) $z_E + 4 = -4 - 3i + 4 = -3i = 3(-i) = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Puisque $z_E + 4 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$,

$$\begin{aligned} f(M) = E &\Leftrightarrow z' = z_E \\ &\Leftrightarrow z' + 4 = z_E + 4 \Leftrightarrow |z' + 4| = 3 \text{ et } \arg(z' + 4) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mais alors d'après la question **3)a)**

$$\begin{aligned} f(M) = E &\Leftrightarrow |z-2|^2 = 3 \text{ et } 2\arg(z-2) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{3} \text{ et } \arg(z-2) = -\frac{\pi}{4} \text{ à } k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z - 2 = \sqrt{3}e^{-i(\frac{\pi}{4}+\pi)} \\ &\Leftrightarrow z = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } z = 2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4+\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z = \frac{4-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(M) = E \text{ si et seulement si } z_M = \frac{4+\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z_M = \frac{4-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) a) **Faux** b) **Vrai** c) **Faux**

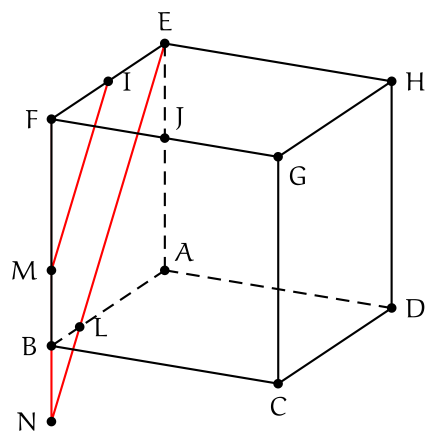
2) a) **Vrai** b) **Faux** c) **Faux**

3) a) **Faux** b) **Faux** c) **Vrai**

4) a) **Vrai** b) **Vrai** c) **Faux**

5) a) **Vrai** b) **Faux** c) **Faux**

Explications.



1) On a $A(0,0,0)$ et $B(1,0,0)$ et donc $x_L = \dfrac{x_A + 3 \times x_B}{4} = \dfrac{0+3\times 1}{4} = \dfrac{3}{4}$ puis $y_L = z_L = 0$.

2) $4\times 0 - 4\times 0 + 3\times 0 - 3 = -3 \neq 0$. Donc le point A n'appartient pas à Π et la réponse c) est fausse.
Puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$, on a $F(1,0,1)$.
puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1.\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$, on a $G(1,1,1)$. Les coordonnées de J sont donc $(1, \frac{1}{2}, 1)$ et comme $4\times 1 - 4\times \frac{1}{2} + 3\times 1 - 3 = 2 \neq 0$, le point J n'appartient pas au plan Π. La réponse b) est donc fausse.
Puisqu'au moins une réponse est exacte, c'est nécessairement la réponse a).

3) • Puisque E a pour coordonnées $(0,0,1)$ et $F(1,0,1)$, le point I qui est le milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 1)$.

• Un plan parallèle à Π a une équation de la forme $4x - 4y + 3z + a = 0$. Un tel plan passe par I si et seulement si $4\times\frac{1}{2} - 4\times 0 + 3\times 1 + a = 0$ ce qui équivaut à $a = -5$. Une équation cartésienne du plan (P) parallèle à (Π) passant par I est donc $4x - 4y + 3z - 5 = 0$.

• La droite (BF) passe par le point $B(1,0,0)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BF}$ de coordonnées $(1-1, 0-0, 1-0)$ ou encore $(0,0,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (BF) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

• Le point de coordonnées $(1,0,t)$ appartient à (P) si et seulement si $4 + 3t - 5 = 0$ ce qui équivaut à $t = \frac{1}{3}$. Le point d'intersection de la droite (FB) et du plan (P) est donc le point M de coordonnées $(1, 0, \frac{1}{3})$.

4) Le point L a pour coordonnées $(\frac{3}{4}, 0, 0)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EL}$ a pour coordonnées $(\frac{3}{4}, 0, -1)$.
Le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$ et le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{FB}$ a pour coordonnées $(0,0,-1)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

Le point I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ et le point M a pour coordonnées $(1, 0, \frac{1}{3})$. Donc le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{2}{3})$.

On a $\overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EL}$. Donc la droite (IM) est parallèle à la droite (EL). La réponse b) est vraie et la réponse c) est fausse.

Les vecteur $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FB}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (EL) et (FB) ne sont pas parallèles. Comme ces droites sont coplanaires (elles sont contenues dans le plan (ABE)), elles sont sécantes en un point N.

La droite (EL) est la droite passant par le point $E(0, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EL}(\frac{3}{4}, 0, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EL) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4}t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Le point $N(\frac{3}{4}t, 0, 1 - t)$ appartient à la droite (FB) si et seulement si $x_N = 1$ ou encore $t = \frac{4}{3}$. Pour cette valeur de t, on obtient $N(1, 0, -\frac{1}{3})$. Le point N est le symétrique du point $M(1, 0, \frac{1}{3})$ par rapport au point $B(1, 0, 0)$. La réponse a) est donc vraie.

5) On peut prendre comme base du tétraèdre $FIJM$ le triangle FIJ et comme hauteur la droite (FM). On sait que le volume du tétraèdre $FIJM$ est

$$V = \frac{(\text{aire de FIJ}) \times FM}{3} = \frac{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \text{aire de EFGH}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times BF\right)}{3} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{3} = \frac{1}{36}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A :

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 1$. Etudions le signe de g'. Soit x un réel.

Si $x < 0$, $e^x < 1$ et donc $g'(x) < 0$ et si $x > 0$ $e^x > 1$ et donc $g'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0] \text{ et strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

En particulier, g admet un minimum en 0. Par suite, pour tout réel x, $g(x) \geq g(0)$ ou encore $g(x) \geq 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R}.}$$

2) Soit x un réel. D'après la question 1), $e^x - x - 1 \geq 0$ et donc $e^x - x \geq 1$. On en déduit en particulier que $e^x - x > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ e^x - x > 0.}$$

Partie B :

1) a) Déterminons la limite de f en $+\infty$.
Soit x un réel.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - \dfrac{x}{e^x}}.$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Par suite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{x}{e^x}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$ et finalement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times 1 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

Déterminons la limite de f en $-\infty$. Soit x un réel strictement négatif.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{-x} \times \frac{1}{1 - \dfrac{e^x}{x}} = -\frac{1}{1 - \dfrac{e^x}{x}}.$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$. Par suite $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{1 - \dfrac{e^x}{x}} = -\frac{1}{1 - 0} = -1$ et finalement $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.}$$

b) On en déduit que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

2) a) D'après la question A.2), la fonction $x \mapsto e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
De plus pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \frac{1 \times (e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

b) Pour tout réel x, on a $e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1. On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3) **a)** Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$. Or, $f(0) = \dfrac{0}{e^0 - 0} = 0$ et $f'(0) = \dfrac{e^0(1-0)}{(e^0-1)^2} = 1$. Une équation de la droite (T) est donc $y = x$.

$$\boxed{(T) \text{ est la droite d'équation } y = x.}$$

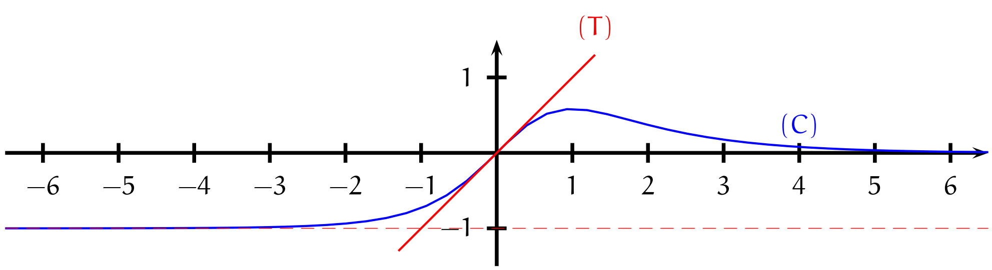
b) Soit x un réel.

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e - x} = \frac{-xg(x)}{e^x - x}.$$

Quand $x = 0$, cette dernière expression est nulle. Si x est un réel non nul, la partie A montre que $\dfrac{g(x)}{e^x - x} > 0$ de sorte que $f(x) - x$ est du signe de $-x$. On en déduit que si $x < 0$ on a $f(x) - x > 0$ et si $x > 0$ on a $f(x) - x < 0$. Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La courbe } (C) \text{ est strictement au-dessus de la droite } (T) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{, strictement au-dessous sur }]0, +\infty[\\ \text{et coupe la droite } (T) \text{ en } O.\end{array}}$$

4) Représentation graphique de f.



 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

EXERCICE 4
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note tout d'abord que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) = \frac{u_n + 3v_n}{4}\ (*).$$

1) $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{7}{2}$ et $v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \dfrac{15}{4}$. Puis $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{29}{8}$ et $v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{59}{16}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{7}{2},\ v_1 = \frac{15}{4},\ u_2 = \frac{29}{8} \text{ et } v_2 = \frac{59}{16}.}$$

2) a) Soit n un entier naturel. D'après la remarque initiale $(*)$, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + 3v_n - 2u_n - 2v_n}{4} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) = \frac{1}{4}w_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4}.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n on a

$$w_n = w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ w_n = \frac{1}{4^n}.}$$

Puisque $\left|\dfrac{1}{4}\right| < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.}$$

3) Soit n un entier naturel. D'après la question 2), on a $v_n - u_n = \dfrac{1}{4^n}$ et en particulier $v_n - u_n > 0$. Ainsi,

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ v_n > u_n.$$

Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) > \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n,$$

et

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) < \frac{1}{4}(v_n + 3v_n) = v_n.$$

Finalement
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

On en déduit encore que

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes et ont même limite.}}$$

On note ℓ la limite commune de ces deux suites.

4) **a)** Soit n un entier naturel.

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2} + 2\times\frac{u_n+3v_n}{4}\right) = \frac{u_n+v_n+u_n+3v_n}{6} = \frac{2u_n+4v_n}{6} = \frac{u_n+2v_n}{3} = t_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

b) Par suite, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_n+2v_n}{3} = \dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$.

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\dfrac{\ell+2\ell}{3} = \dfrac{11}{3}$ ou encore $\ell = \dfrac{11}{3}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{11}{3}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.