BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

EXERCICE 1

1) Soit n un entier naturel. On a $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ et en particulier $u_{n+1} - u_n > 0$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est une suite strictement croissante.}}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n > n^2$.

• On a déjà $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0^2$. L'inégalité de l'énoncé est donc vraie quand $n = 0$.
• Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n > n^2$. On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et donc par hypothèse de récurrence $u_{n+1} > n^2+2n+3$. Mais $n^2+2n+3 > n^2+2n+1$ ou encore $n^2+2n+3 > (n+1)^2$. On en déduit que $u_{n+1} > (n+1)^2$.

On vient de montrer par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n > n^2.}$$

b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et que pour tout entier naturel n, on a $u_n > n^2$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3) Donnons les premières valeurs de u_n dans un tableau.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	4	9	16	25	36

Il semblerait que pour tout entier naturel n on ait $u_n = (n+1)^2$. Montrons par récurrence que cette égalité est effectivement vraie pour tout entier naturel n.

• On a déjà $u_0 = 1 = (0+1)^2$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n = (n+1)^2$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \\
&= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= n^2 + 4n + 4 \\
&= (n+2)^2 \\
&= \left((n+1)+1\right)^2.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = (n+1)^2.}$$

EXERCICE 2

1) **1ère solution.** D'après la formule du binôme de NEWTON, on a

$$\begin{aligned}(1+i)^6 &= \binom{6}{0}1^6i^0+\binom{6}{1}1^5i^1+\binom{6}{2}1^4i^2+\binom{6}{3}1^3i^3+\binom{6}{4}1^2i^4+\binom{6}{5}1^1i^5+\binom{6}{6}1^0i^6\\ &= 1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i.\end{aligned}$$

2ème solution. Mettons $1+i$ sous forme trigonométrique et pour cela calculons d'abord le module de $1+i$.

$$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Mais alors,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite,

$$(1+i)^6=\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6=(\sqrt{2})^6e^{6i\pi/4}=8.e^{3i\pi/2}=8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=-8i.$$

On a montré que

$$\boxed{(1+i)^6=-8i.}$$

2) **a)** D'après 1), $\left((1+i)^3\right)^2=(1+i)^6=-8i$. Une solution de l'équation (E) est donc $(1+i)^3$. Or,

$$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i,$$

et donc

$$\boxed{\text{une solution de l'équation } (E) \text{ est } -2+2i.}$$

b) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}z^2=-8i &\Leftrightarrow z^2=(-2+2i)^2\Leftrightarrow z^2-(-2+2i)^2=0\Leftrightarrow (z-(-2+2i))(z-(2-2i))=0\\ &\Leftrightarrow z=-2+2i \text{ ou } z=2-2i.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E) \text{ sont } -2+2i \text{ et } 2-2i.}$$

3) La question 1) fournit aussi $\left((1+i)^2\right)^3=(1+i)^6=-8i$ avec $(1+i)^2=1+2i-i^2=2i$. Donc

$$\boxed{\text{une solution de l'équation } (E') \text{ est } 2i.}$$

4) **a)** L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est

$$z'=e^{2i\pi/3}z=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z.$$

Par suite,

$$b=e^{2i\pi/3}a=2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}-i,$$

puis

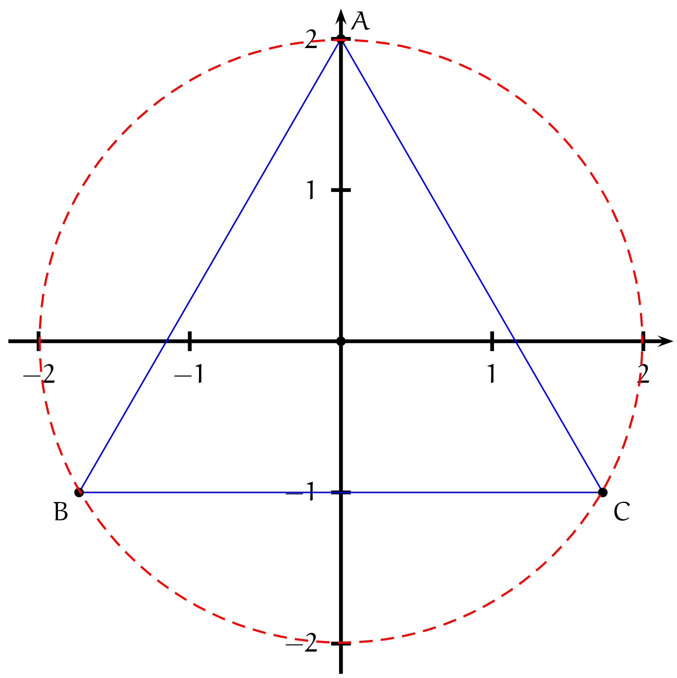
$$c = e^{2i\pi/3}b = e^{2i\pi/3} \times e^{2i\pi/3}a = e^{i(2\pi/3+2\pi/3)}a = e^{4i\pi/3}a = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2i = \sqrt{3} - i.$$

$$\boxed{b = -\sqrt{3} - i \text{ et } c = \sqrt{3} - i.}$$

b) $b^3 = \left(e^{2i\pi/3}a\right)^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 \times a^3 = e^{2i\pi} \times (-8i) = -8i$ et $c^3 = \left(e^{4i\pi/3}a\right)^3 = \left(e^{4i\pi/3}\right)^3 \times a^3 = e^{4i\pi} \times (-8i) = -8i$. Donc

$$\boxed{b \text{ et } c \text{ sont solutions de l'équation } (E').}$$

5) a)



b) Notons tout d'abord que l'on a aussi $r(C) = A$ car $e^{2i\pi/3}c = e^{2i\pi/3}(e^{2i\pi/3})^2a = e^{2i\pi}a = a$.
Maintenant, on sait qu'une rotation est une isométrie. Donc

$$BC = r(A)r(B) = AB,$$

et de même,

$$CA = r(B)r(C) = BC.$$

Ainsi, $AB = BC = CA$ et donc

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral.}}$$

c) Calculons l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

$$\frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral de centre } O.}$$

EXERCICE 3

1)	**D**
2)	**D**
3)	**B**
4)	**B**

Explications.

1) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 1, -3)$. La droite de la proposition A est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 0)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$ et la droite de la proposition C est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 3)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Les réponses A et C sont donc mauvaises.

Il reste les propositions B et D. Dans chacun de ces deux cas, la droite considérée est dirigée par $\overrightarrow{n}$ et est donc parallèle à la droite $\mathscr{D}$. Dans D, $t = -1$ fournit $x = 1$, $y = -2$ et $z = 0$ ce qui montre que le point S appartient à la droite de la proposition D. Puisqu'il n'y a qu'une seule bonne réponse, c'est la D.

Vérifions néanmoins que la proposition B est mauvaise. L'égalité $1 = 2 + t$ fournit $t = -1$ et l'égalité $0 = 1 - 3t$ fournit $t = \frac{1}{3}$. Le réel t ne pouvant être simultanément égal à -1 et à $\frac{1}{3}$, le point S n'appartient pas à la droite de la proposition B, proposition qui est donc fausse.

2) Puisque H est sur la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H sont de la forme $(2 + t, -1 + t, -3 - 3t)$ où t est un réel.

$$H \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (2 + t) + (-1 + t) - 3(-3 - 3t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 11t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{14}{11}.$$

Mais alors les coordonnées de H sont $(2 - \frac{14}{11}, -1 - \frac{14}{11}, -3 + 3 \times \frac{14}{11})$ ou encore $(\frac{8}{11}, -\frac{25}{11}, \frac{9}{11})$.

3) La distance de S au plan $\mathscr{P}$ vaut $\dfrac{|1 + (-2) - 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}}$ ou encore $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

4) La distance d de S au plan $\mathscr{P}$ vaut $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ et le rayon R de $\mathscr{S}$ vaut 3. Par suite $d < R$ et donc l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon strictement positif noté r.

D'après le théorème de Pythagore, $R^2 = d^2 + r^2$ et donc

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{90}{11}} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

Puisqu'il n'y a qu'une bonne réponse, la bonne réponse est nécessairement la réponse B. Notons tout de même que le centre du cercle $\mathscr{C}$ est la projection orthogonale du point S sur le plan $\mathscr{P}$ c'est-à-dire le point H. La réponse B est donc effectivement la bonne réponse.

EXERCICE 4

1) Soient λ et t deux réels.

$$p([0\;;\;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$p([0\;;\;200[) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-200\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-200\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

2) L'événement « le composant a une durée de vie supérieure à 300 semaines » est l'événement contraire de l'événement « le composant n'est plus en état de marche au bout de 300 semaines. Sa probabilité est donc $1 - p([0\;;\;300[)$. Or

$$1 - p([0\;;\;300[) = \exp(-\frac{\ln 2}{200}.300) = \exp(-1,5 \times \ln 2) = \exp(\ln(2^{-1,5})) = 2^{-1,5} = 0,35...$$

Notons encore que $2^{-1,5} = \dfrac{1}{2^{1,5}} = \dfrac{1}{2^1 \times 2^{0,5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

> la probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $0,35$ à 10^{-2} près par défaut.

3) **a)** Soient λ et A deux réels strictement positifs. Pour tout réel positif x, on pose

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-\lambda x}.$$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0, A]$ et pour tout réel x de $[0, A]$, on a

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx &= \int_0^A x \times (\lambda e^{-\lambda x})\,dx \\
&= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^A - \int_0^A 1.(-e^{-\lambda x})\,dx = -Ae^{-\lambda A} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A \\
&= -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A} - 1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

> pour tout réel strictement positif A, $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En tenant compte du fait que λ est strictement positif, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$. Finalement,

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$

Finalement,

> $d_m = \dfrac{200}{\ln 2}$ ou encore $d_m = 288$ semaines à une semaine près.

EXERCICE 5

1) Tout d'abord, x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si v est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, pour tout réel positif t on a

$$25x'(t) + 200x''(t) = 50 \Leftrightarrow 25v(t) + 200v'(t) = 50 \Leftrightarrow v'(t) = -\frac{25}{200}v(t) + \frac{50}{200} \Leftrightarrow v'(t) = -\frac{1}{8}v(t) + \frac{1}{4},$$

ce qui démontre le résultat.

Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{at} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle. Ici, $a = -\frac{1}{8}$ et $b = \frac{1}{4}$. Donc il existe une constante C telle que pour tout réel positif t, on ait

$$v(t) = Ce^{-t/8} + 2.$$

2) **a)** La condition $x'(0) = 0$ fournit $v(0) = 0$ ou encore $Ce^0 + 2 = 0$ et donc $C = -2$. Par suite,

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } t,\ x'(t) = 2 - 2e^{-t/8}.}$$

b) Il existe donc une constante C' telle que pour tout réel positif t, on ait $x(t) = 2t + 16e^{-t/8} + C'$. La condition $x(0) = 0$ fournit $16 + C' = 0$ et donc $C' = -16$.

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } t,\ x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}.}$$

3) Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t/8}$ tend vers 0 et donc $v(t)$ tend vers 2.

$$\boxed{V = 2.}$$

Soit t un réel.

$$\begin{aligned} v(t) \leq 0,9V \Leftrightarrow 2 - 2e^{-t/8} \leq 1,8 \Leftrightarrow -2e^{-t/8} \leq -0,2 \Leftrightarrow e^{-t/8} \geq 0,1 \\ \Leftrightarrow -\frac{t}{8} \geq \ln\left(\frac{1}{10}\right) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ \Leftrightarrow -\frac{t}{8} \geq -\ln(10) \\ \Leftrightarrow t \leq 8\ln(10). \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite si et seulement si $t \leq 8\ln(10) = 18,4...$ s.

4) $x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16e^{-30/8} = 44 + 16e^{-3.75} = 44,3...$

$$\boxed{\text{Au bout de 30 secondes, le chariot a parcouru } 44,3 \text{ m au décimètre près.}}$$

