BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique 2 cm.
On appelle A le point d'affixe $-2i$.
A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2i.$$

1) On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.

2) Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).

3) Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.

4) Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z + 2i$.

a) Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$.

b) Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.

c) En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.

d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

5) En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte $1,50$ €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'événement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1) Détermination d'une relation de récurrence.

a) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b) Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.

c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

d) En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2) Etude de la suite (p_n).

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c) Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 3 (9 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0; 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$;
(3) Pour tout réel x, $f(x) \leq x$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité graphique 10 cm.

I. Première partie. Etude d'un modèle.

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = xe^{x-1}.$$

1) Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).

2) Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{e}(e^x - e)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).

3) Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie. Un calcul d'indice.

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) et (3), on définit un indice I égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1) Justifier que $I = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\, dx$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.

3) On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}.$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2) et (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

a) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 [x - f_n(x)]\, dx$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

b) Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0;1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$,

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}$.

e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.