BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit D une droite munie d'un repère $(O, \overrightarrow{i})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1) Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n.

3) Comparer a_n et b_n. Etudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
Interpréter géométriquement ces résultats.

4) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous même milieu I.

6) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

EXERCICE 2 (7 points)

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0;+\infty[$.

Soit $a \in [0;+\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{dt}{1+t}\,dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,dt$.

1) Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.

2) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.

3) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I_{k+1}(a) = \dfrac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

4) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$. Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$ que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5) Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,dt$. Calculer $J(a)$.

6) (a) Démontrer que pour tout $t \in [0;a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

(b) Démontrer que pour tout $a \in [0;+\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7) En déduire que pour tout $a \in [0;+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \dfrac{a^6}{6}$.

8) Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) La forme algébrique de z^2 est :

$$A \ : \quad 2\sqrt{2} \qquad B \ : \quad 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} \qquad C \ : \quad 2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2}) \qquad D \ : \quad 2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}.$$

2) z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

$$A \ : \quad 4e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad B \ : \quad 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad C \ : \quad 4e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad D \ : \quad 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

3) z s'écrit sous forme exponentielle :

$$A \ : \quad 2e^{i\frac{7\pi}{8}} \qquad B \ : \quad 2e^{i\frac{\pi}{8}} \qquad C \ : \quad 2e^{i\frac{5\pi}{8}} \qquad D \ : \quad 2e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

4) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

$$A \ : \quad \frac{7\pi}{8} \qquad B \ : \quad \frac{5\pi}{8} \qquad C \ : \quad \frac{3\pi}{8} \qquad D \ : \quad \frac{\pi}{8}.$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On considère le tétraèdre $ABCD$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et J celui du segment $[CD]$.

1) **(a)** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,-1),(D,1)\}$.
Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

(b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(D,2)\}$.
Démontrer que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placer G_2.

(c) Montrer que IG_1DJ st un parallélogramme. En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2) Soit m un réel.
On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}$.

(a) Préciser l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.

Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble E.

(b) Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).

(c) Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

(d) En déduire l'ensemble F des points G_m lorsque m décrit l'ensemble E.

Feuille à joindre avec la copie