Matrices

Définitions

Une matrice carrée réelle A de taille n est un tableau carré de nombres réels à n lignes et n colonnes.
Pour chaque i et chaque j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, le coefficient ligne i, colonne j, est noté $a_{i,j}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i \text{ ème ligne} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j\text{-ème colonne} \end{array}$$

Une matrice colonne réelle de taille n est un tableau de réels à une seule colonne et n lignes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Opérations sur les matrices

Addition des matrices Soient A et B deux matrices carrées de taille n. La somme $A + B$ de ces deux matrices est la matrice carrée de taille n dont le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne est la somme des coefficients des matrices A et B situés à la i-ème ligne et j-ème colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,j} & \dots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,j} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,j}+b_{1,j} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+b_{i,1} & \dots & a_{i,j}+b_{i,j} & \dots & a_{i,n}+b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,j}+b_{n,j} & \dots & a_{n,n}+b_{n,n} \end{pmatrix}$$

L'addition des vecteurs colonnes est définie de manière analogue : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_i + y_i \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Multiplication d'une matrice par un réel. Soient A une matrice carrée de taille n et k un réel. kA est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients ont été multipliés par k

$$k \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{1,1} & \dots & ka_{1,j} & \dots & ka_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i,1} & \dots & ka_{i,j} & \dots & ka_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{n,1} & \dots & ka_{n,j} & \dots & ka_{n,n} \end{pmatrix}$$

De même pour l'addition d'un vecteur colonne par un réel : $k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_i \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$.

Produit d'une matrice carrée par un vecteur colonne. Soient A une matrice carrée de taille n et X un vecteur colonne à n lignes. Le produit $A \times X$ est le vecteur colonne est le vecteur colonne Y à n lignes dont le coefficient ligne i est le « produit scalaire » de le i-ème ligne de la matrice A par la colonne X :

$$y_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix}.$$

Produit de deux matrices carrées. Soient A et B deux matrices carrées de taille n. $A \times B$ est la matrice carrée de taille n dont la j-ème colonne, $1 \leqslant j \leqslant n$, est le produit de la matrice A par la j-ème colonne de B.
Le coefficient $c_{i,j}$ situé ligne i, colonne j dans la matrice $A \times B$ est le « produit scalaire » de la ligne i de A par la colonne j de B c'est-à-dire

$$c_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \ldots + a_{i,n} \times b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,j} & \ldots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \ldots & b_{i,j} & \ldots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,j} & \ldots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \ldots & & \ldots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \ldots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} & \ldots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \ldots & & \ldots & \end{pmatrix}.$$

Règles de calcul. (Les matrices apparaissant ci-dessous sont toutes de taille n.)

- L'addition.

• Pour toutes matrices carrées A et B, $A+B = B+A$ et pour toutes matrices colonnes X et Y, $X+Y = Y+X$ (l'addition des matrices est commutative).
• Pour toutes matrices carrées A, B et C, $(A+B)+C = A+(B+C)$ et pour toutes matrices colonnes X, Y et Z, $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$ (l'addition des matrices est associative).
• On note 0_n la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls. Pour toute matrice carrée A, $A+0_n = A$. De même, si on note 0 la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls, pour tout vecteur colonne X, $X+0 = 0$.
• Pour toute matrice carrée A, $A+(-A) = 0$ (où $-A$ est la matrice dont les coefficients sont les opposés des coefficients de A).

- La multiplication.

• Il est possible de trouver des matrices carrées A et B telles que $A \times B \neq B \times A$ (la multiplication des matrices n'est pas commutative).
• Pour toutes matrices carrées A, B et C, $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (la multiplication des matrices est associative).
• On note I_n la matrice unité : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour toute matrice carrée A, $A \times I_n = I_n \times A = A$ et pour toute matrice colonne X, $I_n \times X = X$.
• Pour toutes matrices carrées A, B et C, $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$ et $(B+C) \times A = B \times A + C \times A$.
Pour toute matrice carrée A et toutes matrices colonnes X et Y, $A \times (X+y) = A \times X + A \times Y$ et pour toutes matrices carrées A et B et tout vecteur colonne X et Y, $A \times (X+Y) = A \times X + A \times Y$ (la multiplication est distributive sur l'addition).
• Pour toutes matrices carrées A et B, si $A = 0_n$ ou $B = 0_n$, alors $A \times B = 0_n$. La réciproque est fausse ou encore il est possible de trouver deux matrices carrées A et B telles que $A \neq 0_n$, $B \neq 0_n$ et $A \times B = 0_n$.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Soient A une matrice carrée de taille n et p un entier naturel non nul. La matrice $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ se note A^p.

  Pour toute matrice carrée A de taille n et tous entiers naturels non nuls p et q, $A^p \times A^q = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = A^{pq}$.

- Une matrice diagonale est une matrice carrée D de la forme $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

  Dans ce cas, pour tout entier naturel non nul p, $D^p = \begin{pmatrix} d_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & d_n^p \end{pmatrix}$.

Matrice inversible, inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice carrée B de taille n telle que $A \times B = B \times A = I_n$. Dans ce cas, la matrice B est unique, la matrice B s'appelle l'inverse de A et se note A^{-1} : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ ($ad - bc$ s'appelle le déterminant de la matrice A).

Systèmes linéaires

On considère le système à n inconnues et n équations :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right. \qquad (S)$$

où les inconnues sont les n réels $x_1, \ldots, x_n$. Si on pose $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit $AX = B$.

Dans le cas où la matrice carrée A est **inversible**, le système (S) admet une unique solution :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

On dit dans ce cas que le système (S) est un système de CRAMER.

Application à l'évolution de processus

Quand on se déplace sur un graphe à p sommets et que l'on a à chaque fois une certaine probabilité d'aller d'un sommet à un autre, on parle de **marche aléatoire**.
La matrice de transition A d'une telle marche aléatoire est la matrice carrée de taille p dont le coefficient ligne i, colonne j, ($1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) est la probabilité $p_{i,j}$ d'aller du sommet i au sommet j.
On effectue n pas dans ce graphe. On note X_n la matrice colonne dont le i-ème coefficient ($1 \leqslant i \leqslant p$) est la probabilité d'être au sommet i au bout de ces n pas.

Pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
Pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

On dit que la suite de matrices colonnes (X_n) converge si et seulement si chacune des suites composantes de X_n converge.
On dit que la suite de matrices carrées (A^n) converge si et seulement si chacune des suites coefficients de A^n converge.
La suite de matrices colonnes (X_n) converge si et seulement si la suite de matrices carrées (A^n) converge.
Si la suite (X_n) converge et si on pose $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = X$, la matrice colonne X décrit l'**état stable** de la marche aléatoire.
La matrice colonne X est solution de l'équation $X = AX$.