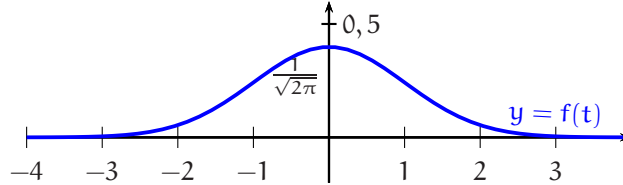


# Loi normale

## 1) La loi normale centrée réduite.

- La loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  est la loi de probabilité dont la densité est la fonction  $f$  définie par :

pour tout réel  $t$ ,  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

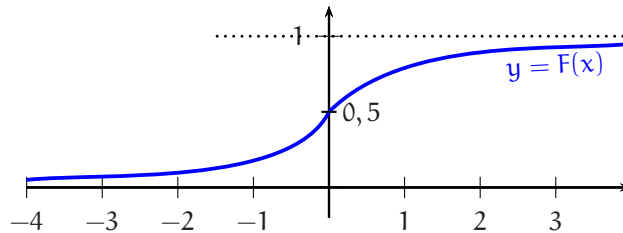


**Remarque.** Au cours des études post-bac, on sait démontrer que l'intégrale de GAUSS  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  est égale à  $\sqrt{2\pi}$ .

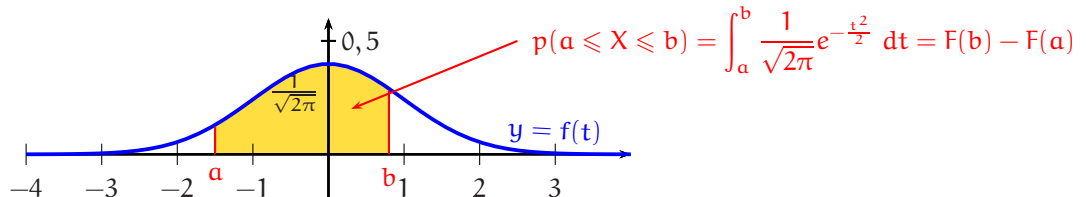
En divisant par  $\sqrt{2\pi}$ , on normalise :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ .

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est la fonction  $F$  définie par :

pour tout réel  $x$ ,  $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .



Pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ , on a  $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(b) - F(a)$ .



On ne sait pas exprimer les intégrales précédentes à l'aide des fonctions usuelles à disposition en terminale. Pour obtenir des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on dispose soit de la calculatrice, soit de tables numériques fournies à la fin de certains livres.

- L'espérance de la loi normale centrée réduite est 0 (la loi est centrée) et l'écart-type de la loi normale centrée réduite est 1 (la loi est réduite).

## 2) Théorème de MOIVRE-LAPLACE.

La loi normale approche la loi binomiale. Plus précisément :

**Théorème.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère une variable aléatoire  $X_n$  qui suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  puis on considère  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ , la variable centrée réduite associée.

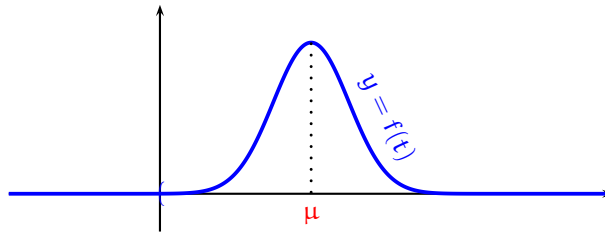
Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p \left( np + a\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + b\sqrt{np(1-p)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

### 3) Loi normale : cas général.

- Une variable aléatoire  $X$  suit la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  si et seulement si la variable aléatoire  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

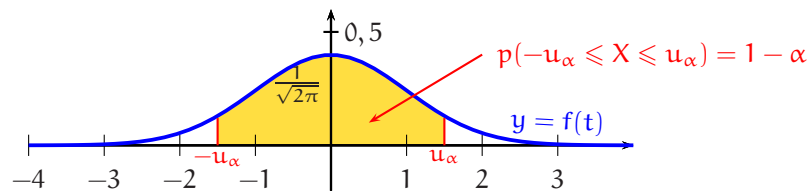
$\mu$  est l'espérance de  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  est sa variance et  $\sigma$  est son écart-type.



### 4) Intervalle associé à une probabilité

**Théorème.** Soit  $X$  une variable aléatoire régie par la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

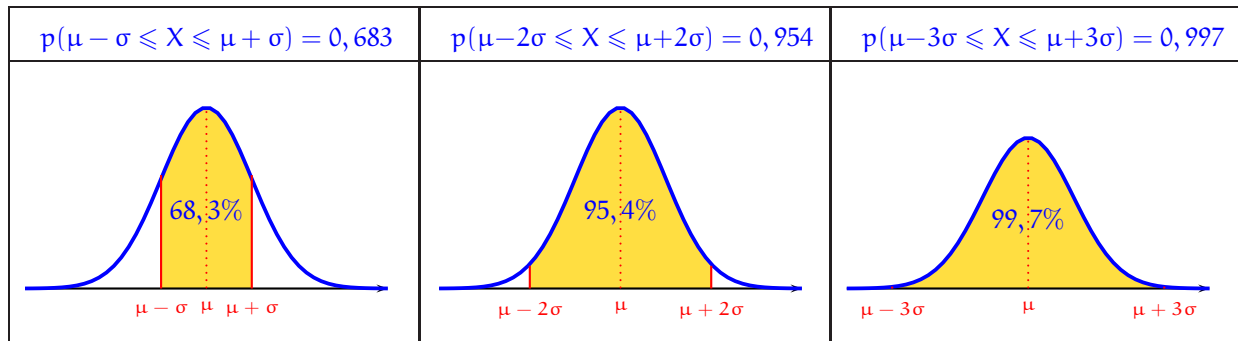
Pour tout réel  $\alpha \in ]0, 1[$ , il existe un réel strictement positif  $u_\alpha$  et un seul tel que  $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ .



On doit connaître en particulier  $u_{0,05} = 1,96$  et  $u_{0,01} = 2,58$ .

Inversement, pour une loi normale en général, on doit connaître les probabilités associées à des intervalles centrés autour de  $\mu$  de rayon  $\sigma$ ,  $2\sigma$  ou  $3\sigma$  :

**Théorème.** Soit  $X$  une variable aléatoire régie par une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ .



**Conséquence.** Si  $X_n$  est une variable aléatoire régie par une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  et si  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$