Coefficients binomiaux. Loi binomiale

Epreuve et schéma de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec, pile ou face ...)
Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Coefficients binomiaux. Loi binomiale

Définition. On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On note p la probabilité de succès à chaque épreuve de Bernoulli.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves. La loi de probabilité de X est appelée la loi binomiale de paramètres n et p, souvent notée $\mathscr{B}(n,p)$.

Définition. On représente un schéma de Bernoulli de paramètres n et p par un arbre. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins menant à k succès sur les n tentatives est le nombre $\binom{n}{k}$ (qui se lit « k parmi n »).

Théorème (loi binomiale). Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Théorème (espérance, variance et écart-type de la loi binomiale). Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$$E(X) = np,\ V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Propriétés des coefficients binomiaux

- Pour tout entier naturel n, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Pour tout entier naturel non nul n, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- Pour n et k entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- **Triangle de Pascal.** Pour n et k entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$