Géométrie dans l'espace

Vecteurs coplanaires ou non. Repères

Théorème. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Théorème. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$ de l'espace, il existe un triplet de réels (x, y, z) et un seul tel que $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$.

Définition. Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où O est un point et $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Définition et théorème. Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un triplet de réels (x, y, z) et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Le triplet (x, y, z) est le triplet des coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Définition analogue pour les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$.

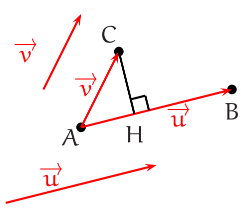
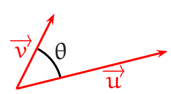
Formulaire

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Les coordonnées du centre gravité G du triangle ABC sont $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}, \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.
- Si $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$, alors

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$ et $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Produit scalaire

Différentes expressions du produit scalaire

 $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.	 Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ $=$ $\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$.	Si, dans un repère orthonormal $\mathscr{R}$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) et le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées (x', y', z'), alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel λ, on a

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$.
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ et $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$.

Si dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$, $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) alors,

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$, les points A et B ont pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) alors, la distance de A à B est

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$