Droites et plans de l'espace

Droites de l'espace

• Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

• Si $\mathscr{D}$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\neq \overrightarrow{0})$ et $\mathscr{D}'$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}(\neq \overrightarrow{0})$:

- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.
- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ admet pour représentation paramétrique

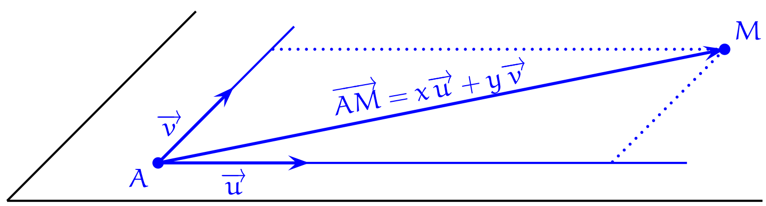
$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, l'ensemble des points de l'espace de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$ où l'un au moins des trois réels a, b ou c est non nul est la droite passant par le point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$.

Plans de l'espace

Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires

Soient A un point et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et dirigé par le couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est l'ensemble des points M pour lesquels il existe deux réels x et y pour lesquels $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.



Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

- Un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ est un vecteur **non nul** orthogonal à toute droite de $\mathscr{P}$. Deux vecteurs normaux à un même plan $\mathscr{P}$ sont colinéaires.
  Un vecteur est normal à un plan si et seulement si ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
- Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace. Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0.$$

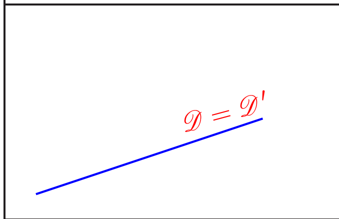
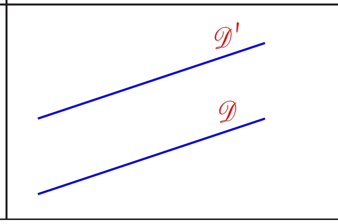
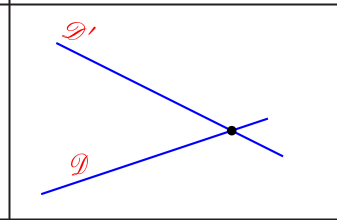
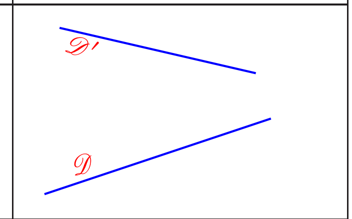
- Si dans un repère othonormal le point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et le vecteur $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées (a, b, c) (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul), une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

- Dans un repère orthonormal, tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul. Réciproquement, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.

Parallélisme et orthogonalité de deux droites

Les différentes positions relatives de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont

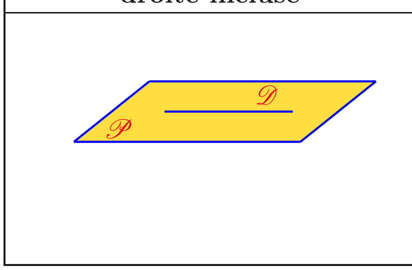
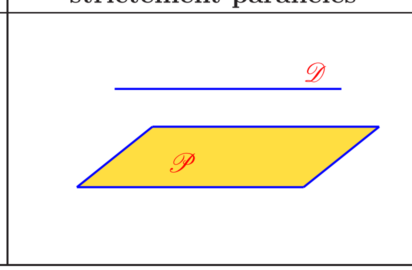
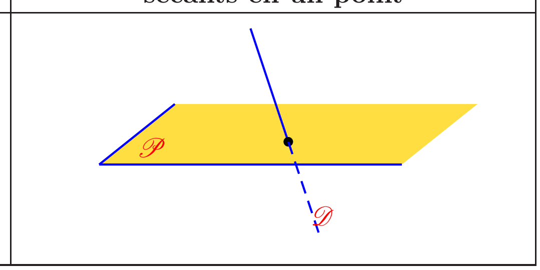
Droites parallèles		**Droites non parallèles**	
confondues	**strictement parallèles**	**sécantes**	**non coplanaires**
			
coplanaires			**non coplanaires**

En particulier,
- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont aucun point en commun, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires,
- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ peuvent être sécantes ou non coplanaires.

- Soient $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{D}'$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}'$.
  $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires. Dans ce cas, tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est colinéaire à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}'$.
- Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{D}'$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}'$.
  $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont orthogonaux. Dans ce cas, tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}'$.
  Quand $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes ou non coplanaires.
  Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales et sécantes, on dit que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires.

Parallélisme et perpendicularité d'un plan et d'une droite

Les différentes positions relatives d'un plan $\mathscr{P}$ et d'une droite $\mathscr{D}$ sont

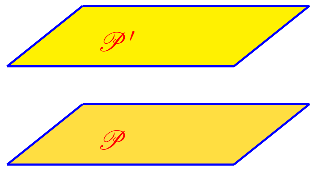
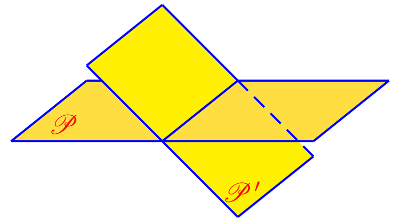
Plans et droites parallèles		**Plans et droites non parallèles**
droite incluse	**strictement parallèles**	**sécants en un point**
		

Soient $\mathscr{P}$ un plan dirigé par le couple de vecteurs non colinéaires $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (c'est-à-dire à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$). Dans ce cas, $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathscr{P}$.
  $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.
  Dans ce cas, $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{D}$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Parallélisme et perpendicularité de deux plans

Les différentes positions relatives de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont

Plans parallèles		**Plans non parallèles**
confondus	**strictement parallèles**	**sécants en une droite**
		

Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ admettent un même couple de vecteurs non colinéaires $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ les dirigeant.

Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{P}'$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'$.

- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux.

Distance d'un point à un plan (hors programme)

Soient $\mathscr{P}$ un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan $\mathscr{P}$ est la distance de M_0 au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$. Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de $\mathscr{P}$.

Si dans un repère othonormal le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) alors la distance de M_0 à $\mathscr{P}$ est

$$d(M_0, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$