Lois de probabilités continues

Densité de probabilité et loi de probabilité sur un intervalle I

1) Densité de probabilité sur un intervalle I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une densité de probabilité sur I est une fonction définie sur I vérifiant les trois conditions :

- f est continue sur I
- pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant 0$
- L'aire du domaine située sous la courbe représentative de f est égale à une unité d'aire.

2) Loi de probabilité sur un intervalle I

Soit X une variable aléatoire continue. Dire que X suit la loi de probabilité de de densité f équivaut à dire que

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \text{ la probabilité que } X \in [a,b] \text{ est } p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Plus généralement, pour tout intervalle J,

$$p(X \in J) = \int_J f(x)\,dx.$$

La **fonction de répartition** associée à la densité f est la fonction F définie par

$$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = p(X \leqslant x) = p(X \in]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt.$$

On peut alors écrire $p(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Remarque. Pour tout réel x, $p(X = x) = 0$.
Donc $p(X \leqslant x) = p(X < x)$ ou aussi $p(a \leqslant X \leqslant b) = p(a \leqslant X < b) = p(a < X < b)$.

3) Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire continue.

L'**espérance mathématique** de X est :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx.$$

La **variance** de X est :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 f(x)\,dx.$$

L'**écart-type** de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemples de lois continues

1) Loi uniforme

La loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ est la loi de probabilité qui a pour densité la fonction constante $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$.
Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a,b]$, pour tous réels c et d tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

Théorème. L'espérance de la loi uniforme est $\dfrac{a+b}{2}$.

2) Loi exponentielle de paramètre λ

Soit λ un réel strictement positif. La loi exponentielle de paramètre λ est la loi de probabilité qui a pour densité la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on a pour tout réel positif x

$$p(0 \leqslant X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dx = 1 - e^{-\lambda x},$$

et donc aussi

$$p(X > x) = e^{-\lambda x}.$$

Théorème. L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Théorème. Quand une durée de vie X obéit à la loi exponentielle de paramètre λ, la durée de vie est sans vieillissement : pour tous réels positifs t et h,

$$p_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = p(X \geqslant h) \text{ ou aussi } p(X \geqslant t + h) = p(X \geqslant t) \times p(X \geqslant h).$$

