Historique : l'apparition des nombres complexes

Nous essayons ci-dessous de vous donner une idée du moment où les nombres complexes sont apparus. La présentation des faits est légèrement romancée mais exacte. Si vous buttez sur les calculs, ne lisez que le début et la fin de ces calculs pour vous concentrer sur le texte.

Les nombres complexes sont nés d'un problème algébrique : la résolution de l'équation de degré 3. Replaçons nous dans le contexte. Nous sommes au XVIème siècle. L'imprimerie a entre cinquante et cent ans d'existence. On ne connaît pas les nombres complexes. Les grands noms des mathématiques de l'époque sont Girolamo Cardano (en français, Jerome Cardan) (1501-1576), Nicolo Tartaglia (1500-1557), Ludovico Ferrari (1522-1565), Scipione Del Ferro (1465-1526) et Rafael Bombelli (1526-1573). Ils travaillent sur la résolution des équations, mais n'ont pas encore à disposition notre formalisme. Par exemple, le problème « $x^3+6x=20$ » devient sous la plume de Cardan : « Soit le cube et six fois le côté égal 20 ».

A cette époque, on sait résoudre l'équation de degré 1 avec une idée simple. L'égalité $2x-4=6$ signifie : en partant d'un nombre inconnu x, en le multipliant par 2 puis en retranchant 4, on trouve 6. Pour retrouver le nombre initial, on effectue **les opérations contraires en sens inverse**. On ajoute 4 au nombre 6, puis on divise le résultat obtenu par 2 et on obtient $x=\dfrac{4+6}{2}=5$.

Il en est de même pour l'équation de degré 2 : $x^2-4=12$. Effectuer les opérations contraires consiste à réajouter 4 à 12 pour obtenir 16 puis à faire le contraire de l'élévation au carré à savoir reprendre la racine carrée. On obtient $x=\sqrt{4+12}=4$ (ou $x=-\sqrt{4+12}=-4$). Les choses se compliquent avec l'équation $x^2-4x+3=0$. Il ne semble plus possible de trouver les opérations successives effectuées à partir de l'inconnue x. Le problème est que **l'inconnue apparaît deux fois**. Tout se passe comme si on avait en fait deux inconnues : x et x^2. Mais une astuce algébrique (la transformation canonique) permet de se ramener à une équation où l'inconnue apparaît une seule fois et donc où l'on comprend les différentes étapes de calcul effectuées à partir de l'inconnue x.

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1=0,$$

et pour obtenir l'inconnue x, il n'y a plus qu'à partir de 0, ajouter 1, prendre la racine carrée (±) et finalement ajouter 2 pour obtenir $x=2+\sqrt{1}=3$ ou $x=2-\sqrt{1}=1$.

Passons à l'équation de degré 3. Par exemple, soit l'équation

$$x^3+3x^2-21x-95=0 \quad (E_1).$$

Comme pour l'équation de degré 2, on cherche à transformer le premier membre de sorte que l'inconnue n'apparaisse qu'une seule fois. On espère parvenir à une équation du genre $(x+1)^3-27=0$. On peut commencer le travail :

$$x^3+3x^2-21x-95=0 \Leftrightarrow (x+1)^3-3x-1-21x-95=0 \Leftrightarrow (x+1)^3-24x-96=0.$$

Malheureusement, le terme $-24x$ persiste. Conservons néanmoins l'idée en considérant la nouvelle inconnue $y=x+1$. L'équation (E_1) s'écrit maintenant plus simplement :

$$(E_1) \Leftrightarrow y^3-24(y-1)-96=0 \Leftrightarrow y^3-24y-72=0 \ (E_1').$$

La nouvelle équation est un peu plus simple car le terme de degré 2 a disparu, mais un terme de degré 1 est toujours écrit. Si maintenant, on cherche à le faire disparaître à l'aide d'un nouveau changement d'inconnue, on peut, mais on fera réapparaître un terme de degré 2. En fait, une manipulation algébrique ne fera pas, dans le cas général, disparaître à la fois le terme de degré 1 et le terme de degré 2 (même si pour l'équation $x^3+3x^2+3x-26=0$, cela marche en l'écrivant successivement $x^3+3x^2+3x+1-27=0$ puis $(x+1)^3-27=0$). Pour continuer, il faut une idée neuve. Cardan (ou plus probablement quelqu'un d'autre comme peut-être Tartaglia (Cardan a une lourde réputation de voleur d'idées)) a eu l'idée de chercher une solution de (E_1') sous la forme $y=u+v$ (pourquoi pas ?). Cela donne

$$\begin{aligned}(E_1') &\Leftrightarrow (u+v)^3-24(u+v)-72=0 \Leftrightarrow u^3+v^3+3u^2v+3uv^2-24(u+v)-72=0\\ &\Leftrightarrow u^3+v^3-72+(u+v)(3uv-24)=0\\ &\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} u^3+v^3-72=0\\ 3uv-24=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^3+v^3=72\\ u^3v^3=8^3=512\end{array}\right.\end{aligned}$$

Il faut faire attention à l'implication $\Leftarrow$ intermédiaire. Ce n'est pas une équivalence. Cette implication doit être comprise sous la forme : si on trouve deux réels u et v tels que la somme u^3+v^3 soit égale à 72 et le produit u^3v^3 soit égal à 512, alors le nombre $y=u+v$ est solution de (E') puis le nombre $x=y-1$ est solution de (E).

u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation de degré 2 :

$$X^2-72X+512=0\ (*)$$

(en effet, u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $(X-u^3)(X-v^3)=0$ ou encore $X^2-u^3X-u^3X+u^3v^3=0$ ou encore $X^2-(u^3+v^3)X+u^3v^3=0$ ou enfin $X^2-72X+512=0$).

Tout est là. L'idée de CARDAN a permis de ramener la résolution d'une équation de degré 3 à la résolution d'une autre équation, de degré 2 celle là. Le discriminant de $(*)$ est $\Delta=(-72)^2-4\times 512=3136=(56)^2$. Les solutions de cette dernière équation sont donc $u^3=\dfrac{72-56}{2}=8=2^3$ et $v^3=\dfrac{72+56}{2}=64=4^3$. Le nombre $y=2+4=6$ est donc solution de (E') puis le nombre $x=y-1=5$ est solution de (E). On peut alors achever la résolution de (E) en mettant $(x-5)$ en facteur :

$$(E)\Leftrightarrow x^3+3x^2-21x-95=0\Leftrightarrow (x-5)(x^2+8x+19)=0\Leftrightarrow (x-5)((x+4)^2+3)=0,$$

et (E) admet une et une seule solution (réelle) à savoir 5.

Réessayons tout ceci avec l'équation $x^3-54x+108=0$ (E_2). On pose $x=u+v$ et on obtient :

$$\begin{aligned}(E_2)&\Leftrightarrow (u+v)^3-54(u+v)+108=0\Leftrightarrow u^3+v^3+108+(u+v)(3uv-54)=0\\ &\Leftarrow\left\{\begin{array}{l}u^3+v^3=-108\\ u^3v^3=18^3=5832\end{array}\right..\end{aligned}$$

u^3 et v^3 sont alors les solutions de l'équation $X^2+108X+5832=0$ $(*)$ dont le discriminant vaut cette fois-ci : $\Delta=(-108)^2-4\times 5832=-11664=-(108^2)$. $(*)$ n'a donc pas de solution, si on ne connaît pas les complexes.

Pourtant, le polynôme $x^3-54x+108$, de degré 3, a forcément une racine car pour $x=-1000$, il prend une valeur négative alors que pour $x=1000$, il prend une valeur positive, et il doit donc bien s'annuler quelque part (la notion de continuité et le théorème des valeurs intermédiaires analysés au chapitre 6, ne seront connus que bien plus tard). Il n'y a pas de raison que la méthode ne fonctionne plus, simplement parce que l'équation $(*)$ n'a pas de solution. L'un des mathématiciens de l'époque décide de continuer :

$$\begin{aligned}X^2+108X+5832&=(X+54)^2-54^2+5832=(X+54)^2+54^2=(X+54)^2-\left(54\sqrt{-1}\right)^2\\ &=\left(X+54+54\sqrt{-1}\right)\left(X+54-54\sqrt{-1}\right).\end{aligned}$$

On y est, les complexes sont en train de naître. L'expression $\sqrt{-1}$ apparaît comme un objet absurde qui plus tard s'écrira i (initiale du mot *impossible* et non pas du mot « imaginaire ») (il faut noter qu'aujourd'hui la notation $\sqrt{-1}$ n'a aucun sens car on ne sait pas si elle désigne le nombre i ou le nombre $-i$ et on n'écrit jamais $\sqrt{-1}$).

On a ainsi $u^3=54\left(-1-\sqrt{-1}\right)$ et $v^3=54\left(-1+\sqrt{-1}\right)$ et donc

$$x=\sqrt[3]{54\left(-1-\sqrt{-1}\right)}+\sqrt[3]{54\left(-1+\sqrt{-1}\right)}=3\left(\sqrt[3]{2\left(-1-\sqrt{-1}\right)}+\sqrt[3]{2\left(-1+\sqrt{-1}\right)}\right)$$

est solution de (E_2). Le résultat sous cette forme n'a évidemment aucun intérêt (et même n'a aucun sens car on peut montrer qu'un nombre complexe non nul donné a, non pas une, mais trois racines cubiques deux à deux distinctes de sorte que l'écriture $\sqrt[3]{54(-1-\sqrt{-1})}$ ne veut rien dire). Il reste encore à découvrir que

$$\left(1-\sqrt{-1}\right)^3=1-3\sqrt{-1}+3\left(\sqrt{-1}\right)^2-\left(\sqrt{-1}\right)^3=1-3\sqrt{-1}-3+\sqrt{-1}=-2-2\sqrt{-1},$$

de sorte que l'on peut prendre $u=3\left(1-\sqrt{-1}\right)$. De même, en remplaçant $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$ (là, c'est la notion de conjugué qui pointe son nez), $v=3\left(1+\sqrt{-1}\right)$ et finalement, $x=u+v=6$. On reporte alors le nombre 6 dans l'équation, un peu sceptique, et on constate émerveillé que ça marche :

$$6^3-54\times 6+108=216-324+108=0.$$

En s'étant permis d'écrire $\sqrt{-1}$, on est allé au bout des calculs, le « nombre » $\sqrt{-1}$ disparaissant en fin de parcours et n'ayant donc été qu'un outil intermédiaire, sans statut propre.

Ainsi sont nés les nombres complexes.