Chapitre 16. Le schéma de Bernoulli

On rappelle ici les différents résultats établies en première S concernant le **schéma de Bernoulli** et le **loi binomiale**.

Description d'une épreuve de Bernoulli.

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve à deux éventualités : vrai ou faux, blanc ou noir, pile ou face, rouge ou pas rouge ...

Exemple. On jette une fois un dé équilibré à 6 face. On a deux possibilités : ou bien il sort le n° 6 ou bien il ne sort pas le n° 6. Cet exemple sera par la suite choisi comme fil conducteur. ❑

Dans la description générale d'une épreuve de Bernoulli, on convient d'appeler « succès » et « échec » les deux résultats possibles de cette épreuve. La probabilité que le résultat soit un succès est traditionnellement notée p et la probabilité que le résultat soit un échec est notée $q = 1 - p$.

Suite de l'exemple. Le succès est « on obtient le n° 6 » et l'échec est « on n'obtient pas le n° 6 ». La probabilité de succès est $p = \frac{1}{6}$ et la probabilité de l'échec est $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. ❑

Description d'un schéma de Bernoulli.

Un **schéma de Bernoulli** consiste à effectuer un certain de nombre de fois une même épreuve de Bernoulli, le résultat de chaque épreuve de Bernoulli étant indépendant des résultats des autres épreuves de Bernoulli. Le nombre d'épreuves est traditionnellement noté n.

Ainsi, un schéma de Bernoulli est caractérisé par les trois conditions suivantes :

1) n expériences identiques sont effectuées ;
2) chaque expérience a deux issues possibles ;
3) les n expériences sont indépendantes les unes des autres.

On considère alors X la variable aléatoire qui associe à une réalisation d'un schéma de Bernoulli le nombre de succès en n tentatives. On dit que la variable aléatoire X est régie par une **loi binomiale de paramètres** n **et** p.

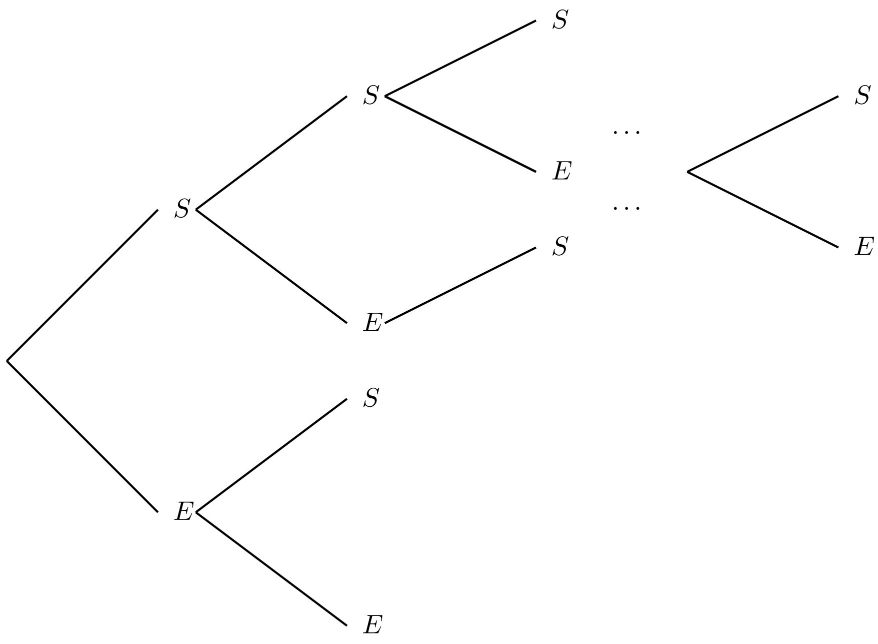
On note $\mathscr{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n et p.

Suite de l'exemple. On jette cinq fois un dé équilibré et on s'intéresse au nombre de fois que sort le n° 6 durant ces cinq lancers. Si on note X la variable aléatoire qui, à une série de 5 lancers de dés, associe le nombre de fois qu'est sorti le numéro 6, alors X est régie par $\mathscr{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)$, la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$. ❑

Les coefficients binomiaux.

Représentons un schéma de Bernoulli par un arbre. Il s'agit d'un arbre à n niveaux. De chaque nœud de l'arbre partent deux branches. Un chemin est une succession de succès et d'échecs et chaque chemin passe par n nœuds (non compris l'origine de l'arbre).

On note S le succès et $E = \overline{S}$ l'échec.



Par définition, pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins comportant k succès se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les **coefficients binomiaux** car il intervienne dans une formule appelée **formule du binome de Newton**, formule qui donne le développement de $(a+b)^n$ mais cette formule n'est pas au programme de première S ou de terminale S.

D'après le programme officiel de première S, on n'est pas obligé de connaître la valeur explicite des nombres $\binom{n}{k}$ car on les obtient grâce à une calculatrice. Néanmoins, on peut démontrer les résultats suivants (le résultat 3 étant hors programme)

1) Pour tout entier naturel n, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2) Pour tout entier naturel n, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
3) Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

où $0! = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $n! = \underbrace{1 \times 2 \times \ldots \times n}_{n \text{ facteurs}}$.

Par exemple, $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$.

Le triangle de Pascal.

Bien que la valeurs des coefficients binomiaux ne soient pas à connaître, on énonce et on démontre en première S un résultat permettant de calculer ces nombres de proche en proche :

Théorème 1. Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration. Soient k et n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant n \leqslant n-1$.
On effectue un schéma de Bernoulli de « longueur » $n+1$. Le nombre de chemins de longueurs $n+1$ comportant $k+1$ succès est par définition $\binom{n+1}{k+1}$.

Ces chemins sont de deux types disjoints : ceux pour lesquels la dernière étape est un succès (type I) et ceux pour lesquels la dernière étape est un échec (type II).

Nombre de chemins du type I. Un chemin du type I est constitué de n étapes dont k sont des succès et de la dernière étape qui est encore un succès. Il y en a autant que de chemins de longueur n comportant k succès c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.

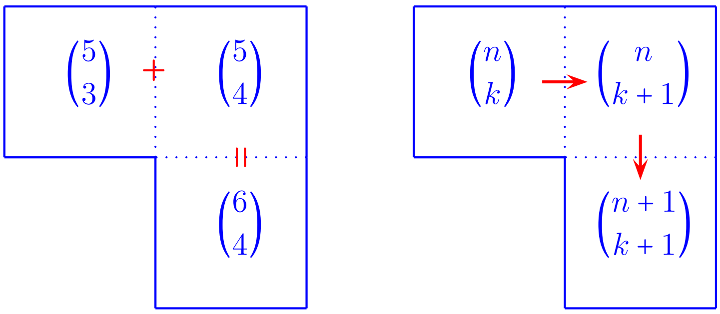
Nombre de chemins du type II. Un chemin du type II est constitué de n étapes dont $k+1$ sont des succès et de la dernière étape qui est un échec. Il y en a autant que de chemins de longueur n comportant $k+1$ succès c'est-à-dire $\binom{n}{k+1}$.

Au total, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

La formule du théorème 1 permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche puis de remplir le **triangle de Pascal**. Dans ce triangle, on place en ligne n° 0 le nombre $\binom{0}{0}$, en ligne n° 1 les nombres $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$, en ligne n° 2 les nombres $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$ ...

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Le schéma de remplissage du triangle ci-dessus est le suivant :



La loi binomiale.

Théorème 2. Soit X une variable aléatoire régie par une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration. Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.

La probabilité de l'événement $X = k$ est la somme des « probabilités des chemins » comportant k succès et donc $n-k$ échecs.
La « probabilité d'un chemin » donné comportant k succès et $n-k$ échecs est égale au produit des probabilités associées à chaque branche de ce chemin. Cette probabilité est donc égale à

$$\underbrace{p \times \ldots \times p}_{k \text{ facteurs}} \times \underbrace{(1-p) \times \ldots \times (1-p)}_{n-k \text{ facteurs}} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Comme il y a par définition $\binom{n}{k}$ chemins comportant k succès et donc $n-k$ échecs, la probabilité de l'événement

« $X = k$ » est :

$$\underbrace{p^k(1-p)^{n-k} + \ldots + p^k(1-p)^{n-k}}_{\binom{n}{k} \text{ termes}} = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Suite de l'exemple. On jette cinq fois de suite un dé équilibré. La probabilité d'obtenir exactement 3 fois le 6 au cours des 5 lancers est

$$p(X=3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \times \frac{5^2}{6^5} = \frac{125}{3888} = 0,03\ldots$$

On a donc environ 3% de chances d'obtenir exactement 3 fois le 6 en lançant un dé équilibré 5 fois de suite. ❑

Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale.

On admet le théorème suivant :

Théorème 3. Soit X une variable aléatoire régie par une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance de X est $E(X) = np$.
La variance de X est $V(X) = np(1-p) = npq$.
L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}$.

Fin de l'exemple. L'espérance de la variable aléatoire « égale » égale au nombre de 6 obtenus au cours de cinq lancers successifs d'un dé est :

$$E(X) = np = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0,8\ldots$$

Au cours des cinq lancers, on obtiendra en moyenne $0,8\ldots$ fois un 6 c'est-à-dire environ une fois un 6 et au cours de 50 lancers, on obtiendra en moyenne 8 fois le 6. ❑

Exercice 1. Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.
L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante.
On suppose que la probabilité d'une personne choisie au hasard accepte de répondre est $0,1$.

1) Calculer la probabilité des évenements suivants (on arrondira au millième) :

a) A : « au moins une personne accepte de répondre ».
b) B : « strictement moins de trois personnes acceptent de répondre ».
c) C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

2) En moyenne, combien de personnes accepteront de répondre ?

Solution. On note X la variable aléatoire qui à une enquête sur 50 personnes associe le nombre de personnes qui acceptent de répondre. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet

- 50 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne accepte de répondre » avec une probabilité $0,1$ et « la personne n'accepte pas de répondre » avec une probabilité $1 - 0,1 = 0,9$.

La variable aléatoire X est donc régie par une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

1) a) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$.

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{50}{0}(0,1)^0(0,9)^{50} = 1 - (0,9)^{50} = 0,995 \text{ arrondie au millième.}$$

b) La probabilité demandée est $p(X < 3)$. La calculatrice donne $\binom{50}{1} = 50$ et $\binom{50}{2} = 1225$ puis

$$\begin{aligned} p(X<3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) &= \binom{50}{0}(0,1)^0(0,9)^{50} + \binom{50}{1}(0,1)^1(0,9)^{49} + \binom{50}{2}(0,1)^2(0,9)^{48} \\ &= (0,9)^{50} + 50 \times 0,1 \times (0,9)^{49} + 1225 \times (0,1)^2 \times (0,9)^{48} \\ &= 0,112 \text{ arrondie au millième.} \end{aligned}$$

Notons que la calculatrice donne aussi directement ce résultat en utilisant le menu « distrib ».

c) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 3)$.

$$p(X \geqslant 3) = 1 - p(X < 3) = 0,888 \text{ arrondie au millième.}$$

2) L'espérance de X est $E(X) = np = 5 \times 0,1 = 5$. En moyenne, 5 personnes sur les 50 accepteront de répondre à l'enquête.

Exercice 2. n est un entier naturel non nul.
On lance n fois de suite un dé bien équilibré et le résultat d'un lancer est indépendant des résultats obtenus aux autres lancers.
1) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 en n lancers.
2) Déterminer le plus petit entier n tel que cette probabilité soit supérieure à $0,999$.

Solution. On note X la variable aléatoire qui à une série de n lancers associe le nombre de fois où on a obtenu un 6. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « on obtient un 6 » avec une probabilité $\dfrac{1}{6}$ et « on n'obtient pas un 6 » avec une probabilité $1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

La variable aléatoire X est donc régie par une loi binomiale de paramètres n et $p=\dfrac{1}{6}$.

1) La probabilité demandée est $p(X\geqslant 1)$.

$$p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

2) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
p(X\geqslant 1)\geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geqslant 0,999\Leftrightarrow 0,001\geqslant\left(\frac{5}{6}\right)^n\Leftrightarrow\left(\frac{6}{5}\right)^n\geqslant\frac{1}{0,001}\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{6}{5}\right)^n\geqslant 1000\\
&\Leftrightarrow\ln\left(\left(\frac{6}{5}\right)^n\right)\geqslant\ln(1000)\ \text{(par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{6}{5}\right)\geqslant\ln(1000)\\
&\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(1000)}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}\ \left(\text{car }\ln\left(\frac{6}{5}\right)>0\right)\\
&\Leftrightarrow n\geqslant 37,8\ldots\\
&\Leftrightarrow n\geqslant 38\ (\text{car } n \text{ est un entier.}).
\end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n tel que $p(X\geqslant 1)\geqslant 0,999$ est 38 ou encore à partir de 38 lancers, on a au moins 999 chances sur 1000 qu'il sorte au moins une fois un 6.