Chapitre 11. Fonctions sinus et cosinus
(rappels et compléments)

I. Rappels

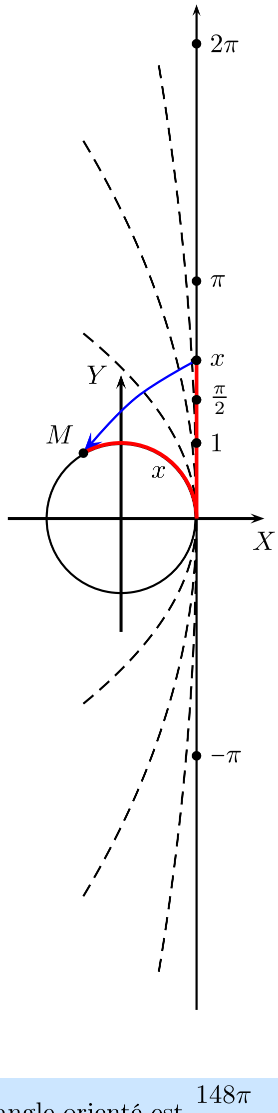
On rappelle ici les principaux résultats en trigonométrie établis dans les classes précédentes.

1) Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthormé direct $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ ou encore (OXY). Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

En « enroulant » l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel x est associé un et un seul point du cercle trigonométrique. Inversement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel x_0, alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel x associé à M par ce procédé est par définition une **mesure en radian** de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{OM}\right)$. L'ensemble des mesures en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{OM}\right)$ est donc l'ensemble des réels de la forme $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, où x_0 est une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{OM}\right)$.



Exercice 1. Une mesure en radian d'un angle orienté est $\dfrac{148\pi}{3}$.

Déterminer la mesure de cet angle qui appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$ et la mesure qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Solution. Les mesures en radian d'un angle de mesure $\dfrac{148\pi}{3}$ sont les réels de la forme $\dfrac{148\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit k un entier relatif.

$$0 \leqslant \frac{148\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{148\pi}{3} \leqslant 2k\pi < -\frac{148\pi}{3} + 2\pi$$

(en soustrayant $\frac{148\pi}{3}$ à chaque membre de l'encadrement)

$\Leftrightarrow -\frac{148\pi}{3\times 2\pi} \leqslant k < -\frac{148\pi}{3\times 2\pi} + \frac{2\pi}{2\pi}$ (en divisant chaque membre de l'encadrement par 2π)

$\Leftrightarrow -\frac{148}{6} \leqslant k < -\frac{148}{6} + 1 \Leftrightarrow -24,66\ldots \leqslant k < -23,66\ldots$

$\Leftrightarrow k = -24$ (car k est un entier relatif).

Ensuite, $\frac{148\pi}{3} + 2(-24)\pi = \frac{148\pi}{3} - 48\pi = \frac{148\pi}{3} - \frac{144\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

La mesure en radian d'un angle de mesure $\frac{148\pi}{3}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ est $\frac{4\pi}{3}$.

En retranchant encore un tour, on obtient la mesure en radian d'un angle de mesure $\frac{148\pi}{3}$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$:

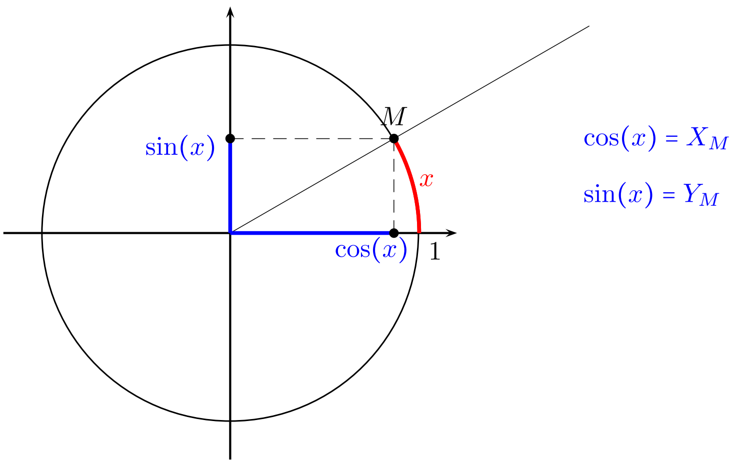
$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

---

2) Définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel

Définition 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ ou encore (OXY).
Soient x un réel puis M le point du cercle trigonométrique associé à x.
Le **cosinus** du réel x est l'abscisse de M et le **sinus** du réel x est l'ordonnée de M :

$$\cos(x) = X_M \text{ et } \sin(x) = Y_M.$$



3) Formules de trigonométrie

a) Relation fondamentale

Théorème 1. **1)** Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2) En particulier pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Exercice 2. a est un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ dont le sinus est égal à $\frac{3}{5}$. Calculer son cosinus.

Solution. $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ et donc $\cos(a)$ est l'un des deux réels $\frac{4}{5}$ ou $-\frac{4}{5}$.

Comme $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a en particulier $\cos(a) < 0$ et finalement

$$\boxed{\cos(a) = -\frac{4}{5}.}$$

---

b) Valeurs usuelles

On doit connaître les valeurs suivantes des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Remarque. La ligne des sinus s'écrit : $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{4}}{2}$.

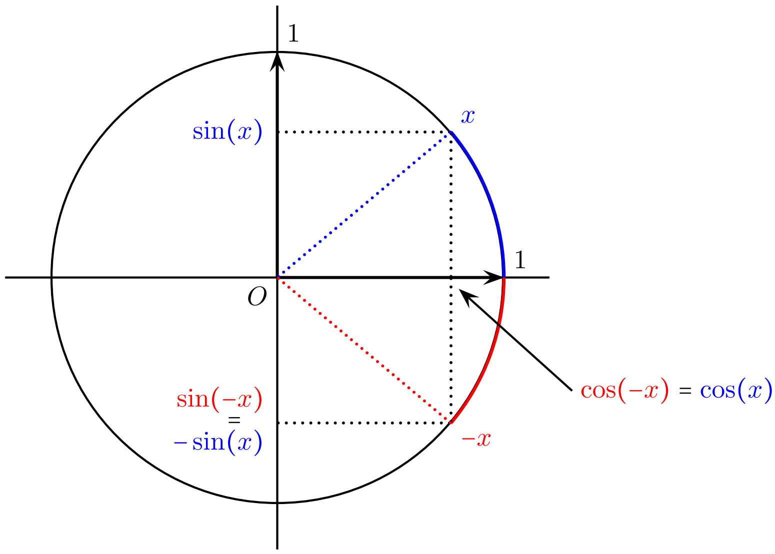
c) Arcs associés

Théorème 2 (addition d'un tour).
Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
Plus généralement, pour tout réel x et tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$.

En effet, les réels x et $x+2\pi$ sont associés à un même point du cercle trigonométrique.

Théorème 3 (angles opposés).
Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

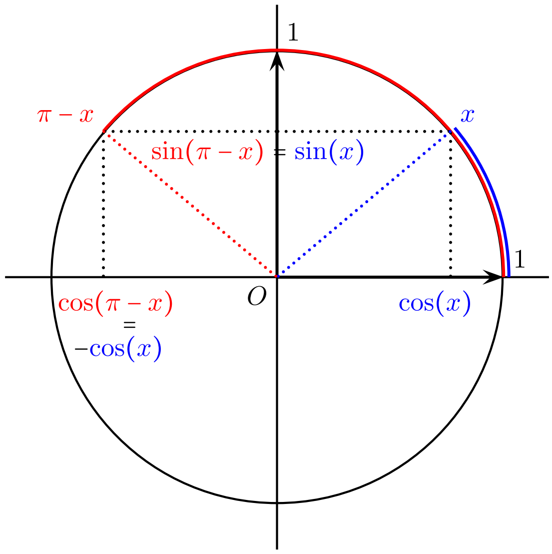
On visualise ce résultat sur le dessin suivant :



Théorème 4 (angles supplémentaires).
Pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

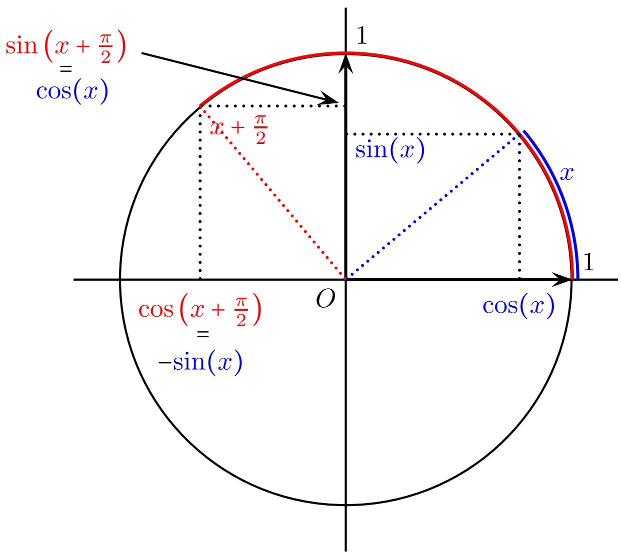
L'« angle » supplémentaire de x est l'« angle » qu'il faut rajouter à x pour obtenir l'« angle plat » à savoir π.
Cet angle supplémentaire a pour mesure $\pi - x$ puisque $x + (\pi - x) = \pi$.

On visualise le résultat précédent sur le dessin suivant :



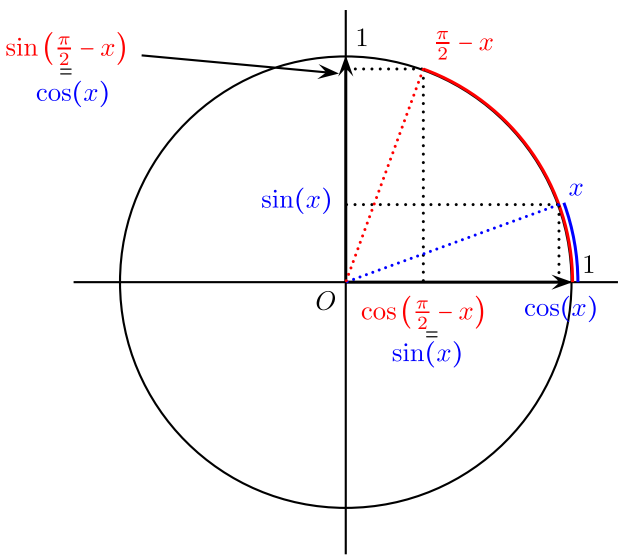
Théorème 5 (addition d'un quart de tour direct).
Pour tout réel x, $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

On visualise le résultat précédent sur le dessin suivant :



Théorème 6 (angles complémentaires).
Pour tout réel x, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

L'« angle » complémentaire de x est l'« angle » qu'il faut rajouter à x pour obtenir l'« angle droit » à savoir $\dfrac{\pi}{2}$.
On visualise le résultat précédent sur le dessin suivant :

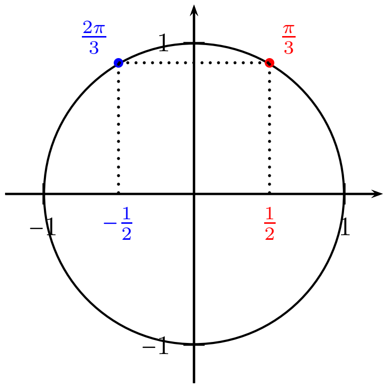


Exercice 3. Calculer les nombres suivants : **1)** $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **2)** $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **3)** $\sin\left(-\dfrac{121\pi}{6}\right)$.

Solution.

1) Un angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ est supplémentaire d'un angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
En effet,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

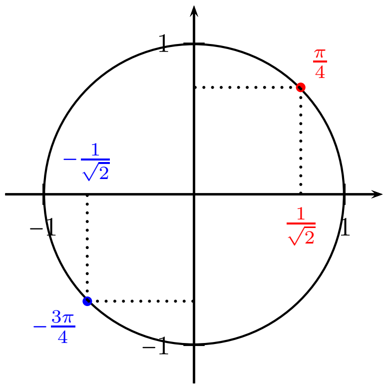


2)

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ou bien

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



3) Pour calculer $\sin\left(-\dfrac{121\pi}{6}\right)$, on cherche d'abord un autre réel appartenant à $[-\pi, \pi[$ qui soit une autre mesure de l'angle de mesure $-\dfrac{121\pi}{6}$ puis on utilise les différentes relations entre les sinus et cosinus d'arcs associés.
Soit k un entier relatif.

$$\begin{aligned}
-\pi \leqslant -\frac{121\pi}{6} + 2k\pi < \pi &\Leftrightarrow \frac{121\pi}{6} - \pi \leqslant 2k\pi < \frac{121\pi}{6} + \pi \Leftrightarrow \frac{115\pi}{6} \leqslant 2k\pi < \frac{127\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \frac{115}{12} \leqslant k < \frac{127}{12} \Leftrightarrow 9,58\ldots \leqslant k < 10,58\ldots \\
&\Leftrightarrow k = 10.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\sin\left(-\frac{121\pi}{6}\right) &= \sin\left(-\frac{121\pi}{6} + 10 \times 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{121\pi}{6} + \frac{120\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Simplifier l'expression suivante :
$A = -\cos(\pi - x) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(x + 3\pi) + 3\sin(-x)$

Solution.

$$\begin{aligned}A &= -\cos(\pi - x) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(x + 3\pi) + 3\sin(-x)\\ &= -(-\cos(x)) + 2\cos(x) - 7\cos(x) + 2\sin(x + \pi) + 3(-\sin(x)) = -4\cos(x) - 2\sin(x) - 3\sin(x)\\ &= -4\cos(x) - 5\sin(x).\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ A = -4\cos(x) - 5\sin(x).}$$

---

d) Formules d'addition. Formules de duplication

On rappelle maintenant les formules d'addition et de duplication établies en classe de première S.

Théorème 7 (formules d'addition).
1) Pour tous réels a et b, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
2) Pour tous réels a et b, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Exercice 5. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Exercice 6. Simplifier l'expression $\cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos(a) + \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit a un réel.

$$\begin{aligned}\cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos(a) + \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos(a) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(a) \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(a)\\ &\quad + \cos(a) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(a) \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\cos(a) + \cos(a) + \frac{1}{2}\cos(a) = 0.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout réel } a,\ \cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos(a) + \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) = 0.}$$

Théorème 8 (formules de duplication).
1) Pour tout réel a, $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
2) Pour tout réel a, $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Exercice 8. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solution. D'après les formules de duplication

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$

Par suite, $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est l'un des deux nombres $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

De plus, $\frac{\pi}{8}$ appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Par suite,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

De même,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Par suite, $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. On en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est l'un des deux nombres $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

De plus, $\frac{\pi}{8}$ appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Par suite,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

---

e) Résolution d'équations trigonométriques

Théorème 9.
1) Pour tous réels a et b, $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + 2k\pi$ ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = -a + 2k\pi$.
2) Pour tous réels a et b, $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + 2k\pi$ ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = \pi - a + 2k\pi$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :
1) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
2) $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
3) $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5) $\sin(x) = \cos(2x)$.

Solution. **1)** Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\cos(x) = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ sont les nombres de la forme $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les nombres de la forme $-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cherchons maintenant parmi ces nombres ceux qui appartiennent à $[0, 2\pi]$. Soit k un entier relatif.

$$0 \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leqslant 2k\pi \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant -\frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow k = 0.$$

Pour $k = 0$, on obtient la solution $\dfrac{2\pi}{3}$. Ensuite,

$$0 \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow k = 1.$$

Pour $k = 1$, on obtient la solution $\dfrac{4\pi}{3}$.

Les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ sont $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\sin(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ sont les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les nombres de la forme $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cherchons maintenant parmi ces nombres ceux qui appartiennent à $[0, 2\pi]$. Soit k un entier relatif.

$$0 \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leqslant 2k\pi \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{1}{12} + 1 \Leftrightarrow k = 0.$$

Pour $k = 0$, on obtient la solution $\dfrac{\pi}{6}$. Ensuite,

$$0 \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leqslant 2k\pi \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{5}{12} + 1 \Leftrightarrow k = 0.$$

Pour $k = 0$, on obtient la solution $\dfrac{5\pi}{6}$.

Les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

3) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont les nombres de la forme $-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ et les nombres de la forme $\dfrac{4\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cherchons maintenant parmi ces nombres ceux qui appartiennent à $[0, 2\pi]$. Soit k un entier relatif.

$$\begin{aligned}0 \leqslant -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant 2\pi &\Leftrightarrow \frac{\pi}{9} \leqslant \frac{2k\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{9} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{9} \times \frac{3}{2\pi} \leqslant k \leqslant \frac{\pi}{9} \times \frac{3}{2\pi} + 2\pi \times \frac{3}{2\pi}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{1}{6} + 3 \Leftrightarrow k \in \{1; 2; 3\}.\end{aligned}$$

Pour $k = 1$, $k = 2$ ou $k = 3$, on obtient les solutions $\dfrac{5\pi}{9}$, $\dfrac{11\pi}{9}$ et $\dfrac{17\pi}{9}$. Ensuite,

$$0 \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{9} \leqslant \frac{2k\pi}{3} \leqslant -\frac{4\pi}{9} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{9} \times \frac{3}{2\pi} \leqslant k \leqslant -\frac{4\pi}{9} \times \frac{3}{2\pi} + 2\pi \times \frac{3}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant -\frac{2}{3} + 3 \Leftrightarrow k \in \{0;1;2\}.$$

Pour $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$, on obtient les solutions $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{10\pi}{9}$ et $\frac{16\pi}{9}$.

Les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{10\pi}{9}$, $\frac{11\pi}{9}$, $\frac{16\pi}{9}$ et $\frac{17\pi}{9}$.

4) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi.
\end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les nombres de la forme $\frac{\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les nombres de la forme $-\frac{\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cherchons maintenant parmi ces nombres ceux qui appartiennent à $[0, 2\pi]$. Soit k un entier relatif.

$$0 \leqslant -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leqslant 4k\pi \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leqslant k \leqslant \frac{7}{12}$$

Il n'existe pas d'entier relatif k tel que $\frac{1}{12} \leqslant k \leqslant \frac{7}{12}$ et donc aucun des nombres de la forme $-\frac{\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, n'appartient à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Ensuite,

$$0 \leqslant \frac{\pi}{3} + 4k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant 4k\pi \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leqslant k \leqslant \frac{5}{12} \Leftrightarrow k = 0.$$

Pour $k = 0$, on obtient les solutions $\frac{\pi}{3}$.

L'équation $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ admet une solution et une seule dans $[0, 2\pi]$ à savoir $\frac{\pi}{3}$.

5) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
\sin(x) = \cos(2x) &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = \cos(2x)$ sont les nombres de la forme $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ et les nombres de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les nombres de la forme $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ qui appartiennent à $[0, 2\pi]$ sont obtenus quand $k \in \{0;1;2\}$. Ce sont les nombres $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$.
Les nombres de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ qui sont dans $[0, 2\pi]$ sont obtenus quand $k = 1$. On obtient de nouveau le nombre $\frac{3\pi}{2}$.

Finalement, les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation $\sin(x) = \cos(2x)$ sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

II. Les fonctions sinus et cosinus

1) La fonction sinus

Pour chaque réel x, on peut calculer le réel $\sin(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ une nouvelle fonction : la fonction sinus. Les différents résultats de première S sur les arcs associés fournissent entre autres des propriétés de périodicité et de parité de cette fonction.

a) Périodicité

Théorème 10.
Pour tout réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$. On dit que la fonction sinus est 2π-périodique ou encore que la fonction sinus est périodique de période 2π.

Commentaire. On ne doit pas dire « **la** période de la fonction sinus est 2π » mais on doit dire « **une** période de la fonction sinus est 2π » car il n'y a pas unicité d'une période.
Les nombres 4π, -2π et plus généralement tout nombre de la forme $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ sont des périodes de la fonction sinus. On peut montrer que 2π est la plus petite période strictement positive de la fonction sinus.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Montrer que la fonction f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

Solution. Soit x un réel.

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=f(x).$$

Ainsi, pour tout réel x, $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$ et donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

Commentaire. Attention à l'accent aigu (et pas grave) sur les mots « période » et « périodique ».

b) Parité

Théorème 11.
Pour tout réel x, $\sin(-x)=-\sin(x)$. La fonction sinus est donc impaire.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x)=\sin^2(x)-\sin(2x)\sin(3x).$$

Etudier la parité de f.

Solution. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}f(-x)&=(\sin(-x))^2-\sin(-2x)\sin(-3x)=(-\sin(x))^2-(-\sin(2x))(-\sin(3x))\\&=\sin^2(x)-\sin(2x)\sin(3x)=f(x).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$ et donc la fonction f est paire.

---

c) Dérivée

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer la dérivée de la fonction sinus. Nous avons besoin de deux résultats préliminaires :

Théorème 12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$.

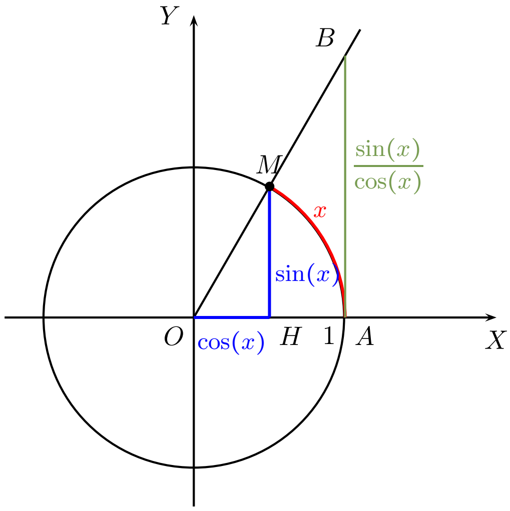
Commentaire. Les physiciens ont l'habitude d'utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ sous la forme : « pour les petites valeurs de θ, $\sin(\theta)$ vaut environ θ ». C'est en particulier ce qu'ils font quand ils analysent le mouvement du pendule simple.

Démonstration. Grâce à des considérations géométriques, nous allons établir que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(x) \leqslant x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ et donc que } \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ ou encore (OXY).

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soient A, B et M les points de coordonnées respectives $(1,0)$, $\left(1, \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$ et $(\cos(x), \sin(x))$.



Tout d'abord, $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}x_B = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = Y_B$ et $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}x_M = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \cos(x) = \sin(x) = Y_M$. Donc les points O, B et M sont alignés sur la droite d'équation $Y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}X$.

x est la longueur de l'arc de cercle joignant le point A au point M et comme le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite, on a déjà $x \geqslant AM$. D'autre part, si on note H le projeté orthogonal du point M sur (OX), H a pour coordonnées $(\cos(x), 0)$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} \geqslant \sqrt{HM^2} = HM = \sin(x).$$

Finalement,

$$\sin(x) \leqslant AM \leqslant x.$$

D'autre part, l'aire du triangle OAB est supérieure ou égale à l'aire du secteur angulaire OAM. L'aire du triangle OAB est $\frac{OA \times OB}{2} = \frac{1 \times (\sin(x)/\cos(x))}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$. On rappelle d'autre part que l'aire d'un secteur angulaire de rayon R est d'angle en radian α est $\frac{\alpha R^2}{2}$. Donc l'aire du secteur angulaire OAM est $\frac{1^2 \times x}{2} = \frac{x}{2}$. On en déduit que

$$\frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \geqslant \frac{x}{2} \text{ et donc } \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant x.$$

En résumé, pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. La deuxième inégalité s'écrit successivement $x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ puis $x\cos(x) \leqslant \sin(x)$ (car $\cos(x) > 0$) et donc $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x}$ (car $x > 0$). On a donc montré que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

Il est clair géométriquement que quand x tend vers 0, $\cos(x)$ tend vers 1. L'encadrement ci-dessus et le théorème des gendarmes permettent alors d'affirmer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ensuite,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{-\sin(y)}{-y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

et finalement

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Il nous reste à vérifier que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=0$. Nous vous proposons deux démonstrations.

Dans ces deux démonstrations, il s'agit de ramener le calcul $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}$ au calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ grâce à des formules de trigonométrie.

1 ère démo.

Soit x un réel non nul. On sait que $\cos(x)=\cos\left(2\times\dfrac{x}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et donc $\cos(x)-1=-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On en déduit que

$$\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\frac{-2}{x}\times\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

puis en posant $y=\dfrac{x}{2}$ de sorte que $x=2y$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\lim_{y\to 0}-\frac{2y}{2}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2=-0\times 1^2=0.$$

2 ème démo. Pour tout réel x appartenant à $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, le nombre $\cos(x)+1$ n'est pas nul et

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)-1}{x}&=\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)}=\frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)}=\frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)}\\&=\frac{-\sin(x)\times\sin(x)}{x\times(\cos(x)+1)}=-\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\end{aligned}$$

Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+1}=\dfrac{0}{1+1}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=1\times 0$.

Nous pouvons maintenant donner la dérivée de la fonction sinus.

Théorème 13. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\sin'(x)=\cos(x)$.

Remarque. Puisque la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction sinus est en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'égalité $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ s'écrit encore $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=1$. La fonction sinus est donc dérivable en 0 et $\sin'(0)=1$.

Plus généralement, donnons nous un réel x_0. Pour $h\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}&=\frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h}\\&=\sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, le rapport $\dfrac{\cos(h)-1}{h}$ tend vers 0 et le rapport $\dfrac{\sin(h)}{h}$ tend vers 1. On en déduit que, quand h tend vers 0, le rapport $\dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$ tend vers $0\times\sin(x_0)+1\times\cos(x_0)=\cos(x_0)$. Ceci démontre la dérivabilité de la fonction sinus en x_0 et le fait que $\sin'(x_0)=\cos(x_0)$.

Théorème 14.
1) Soient a et b deux réels. La dérivée de la fonction $x\mapsto\sin(ax+b)$ est la fonction $x\mapsto a\cos(ax+b)$.
2) Plus généralement, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction $x\mapsto\sin(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée la fonction $x\mapsto u'(x)\cos(u(x))$.

Démonstration. Le 1) est un cas particulier du 2). Le 2) est la conséquence immédiate du théorème donnant la dérivée d'une fonction composée du type $f\circ u$: sa dérivée est $u'\times f'\circ u$.

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \sin(x^2).$$

Déterminer la dérivée de f.

Solution. La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $y \mapsto \sin(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est de la forme $\sin \circ u$ où pour tout réel x, $u(x) = x^2$. Donc, pour tout réel x,

$$f'(x) = u'(x) \times \sin'(u(x)) = 2x\cos(x^2).$$

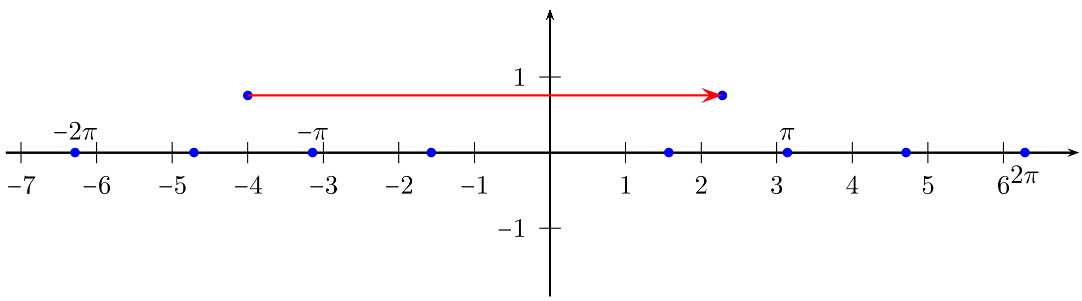
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.

---

d) Etude et graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$

On rappelle que pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. On peut donc se contenter d'un axe des ordonnées allant de $-1,5$ à $1,5$. On rappelle aussi que $\pi = 3,14\ldots$, $\dfrac{\pi}{2} = 1,57\ldots$ et $2\pi = 6,28\ldots$

Utilisation de la périodicité. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est 2π-périodique. Donc, le point de la courbe représentative de la fonction sinus d'abscisse $x + 2\pi$ a même ordonnée que le point de la courbe représentative de la fonction sinus d'abscisse x.



Cela a pour conséquence qu'une fois tracé le graphe de la fonction sinus sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple, on obtient le graphe complet en répétant ce morceau déjà tracé ou encore en déplaçant cette portion de courbe horizontalement d'une longueur de 2π une ou plusieurs fois vers la droite ou vers la gauche .

La périodicité de la fonction permet également de réduire son étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Utilisation de la parité. La fonction sinus est impaire et donc l'origine O est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction sinus. On peut réduire l'étude de la fonction sinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

Sens de variation sur $[0, \pi]$. La fonction sinus est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout réel x de $[0, \pi]$, $\sin'(x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ et s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit le tableau de variation de la fonction sinus.

x	0		$\pi/2$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On note que la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis, la fonction sinus étant impaire,

$$\text{la fonction sinus est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Tangente parallèle à (Ox). Les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction sinus en lesquels la tangente est parallèle à (Ox) sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. Pour $x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, le graphe de la fonction sinus sur $[0, \pi]$ admet un et un seul point en lequel la tangente est parallèle à (Ox) :

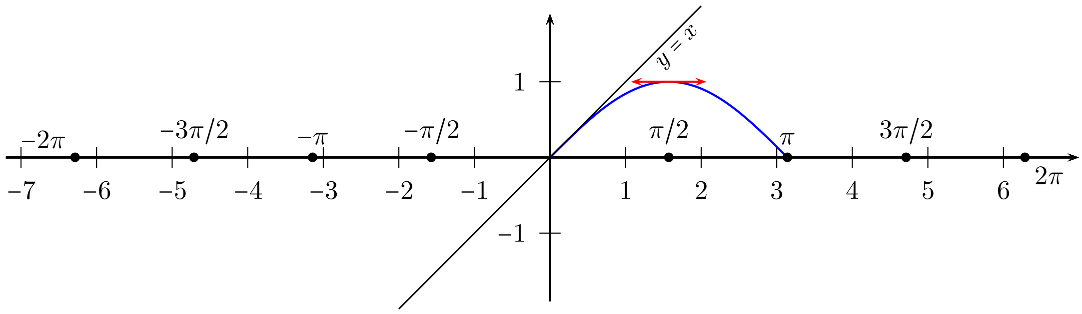
le point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

Tangente en O. $\sin(0) = 0$ et donc le graphe de la fonction sinus passe par O. $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et donc la tangente au graphe de la fonction sinus en O est la droite d'équation $y = x$.

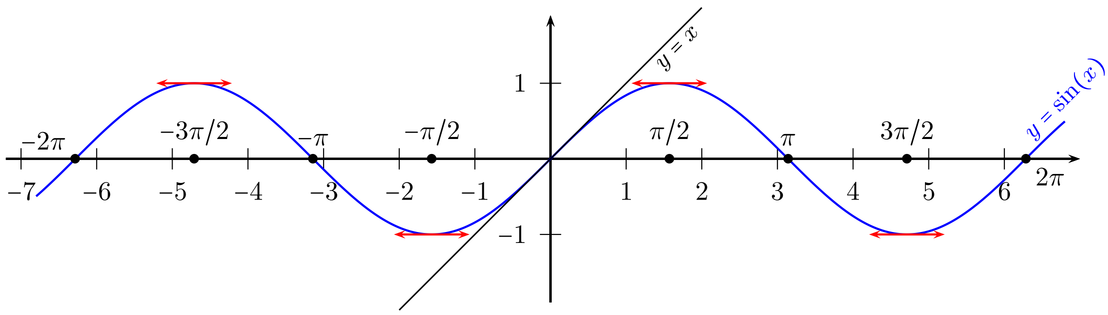
Symétrie par rapport à la droite déquation $x = \dfrac{\pi}{2}$. Pour tout réel x de $[0, \pi]$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. Cela se traduit par le fait que les points d'abscisse x et $\pi - x$ ont la même ordonnée. Comme le milieu de x et de $\pi - x$ est $\dfrac{x + \pi - x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, cela signifie que les points d'abscisse x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, le graphe de la fonction sinus admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

Graphe sur $[0, \pi]$.



Graphe de la fonction sinus. La courbe obtenue s'appelle une **sinusoïde**.



2) La fonction cosinus

a) Périodicité

Théorème 15.
Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. La fonction cosinus est donc 2π-périodique ou encore la fonction cosinus est périodique de période 2π.

b) Parité

Théorème 16.
Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est donc paire.

c) Dérivée

Nous allons obtenir la dérivée de la fonction cosinus à partir de l'égalité $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ valable pour tout réel x.

Théorème 17.
La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ est pour tout réel x, $(\cos)'(x) = -\sin(x)$.

Démonstration. On sait que pour tout réel x, $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. D'après les théorèmes 14 et 5, la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\cos'(x) = 1 \times \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

Théorème 18.
1) Soient a et b deux réels. La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto -a\sin(ax+b)$.
2) Plus généralement, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction $x \mapsto \cos(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée la fonction $x \mapsto -u'(x)\sin(u(x))$.

Démonstration. Le 1) est un cas particulier du 2). Le 2) est la conséquence immédiate du théorème donnant la dérivée d'une fonction composée du type $f \circ u$: sa dérivée est $u' \times f' \circ u$.

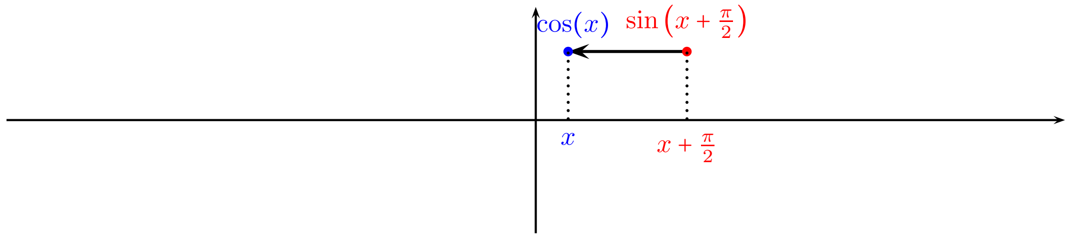
---

d) Etude et graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x)$

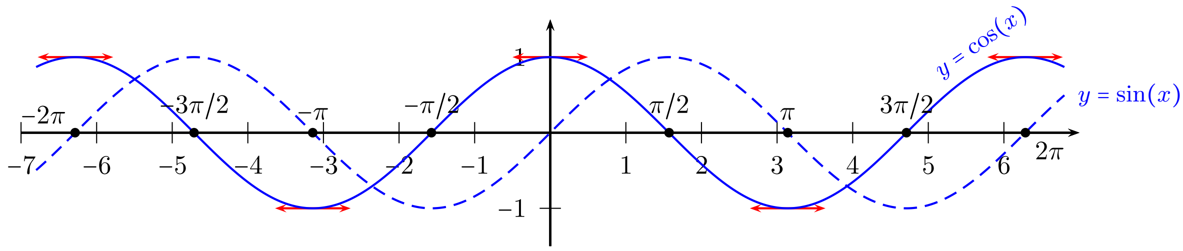
L'étude de la fonction cosinus se déduit entre autres de l'étude de la fonction sinus à partir de l'égalité

$$\text{pour tout réel } x,\ \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

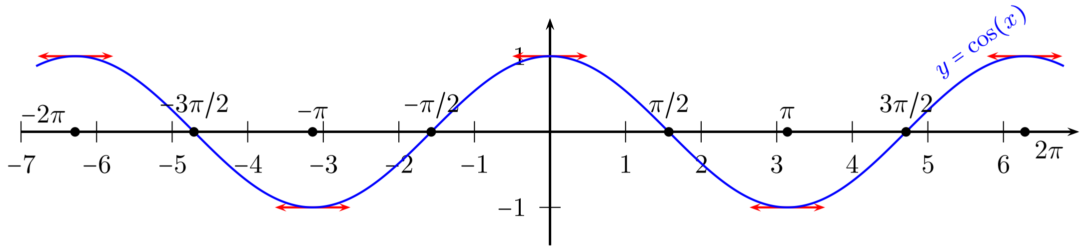
Cette égalité signifie que le point d'abscisse x de la courbe représentative de la fonction cosinus a même ordonnée que le point d'abscisse $x + \frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction sinus. On obtient donc un point de la courbe représentative de la fonction cosinus en déplaçant horizontalement un point du graphe de la fonction sinus d'une longueur de $\frac{\pi}{2}$ **vers la gauche**.



En déplaçant le graphe de la fonction sinus horizontalement de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche, on obtient



et donc, le graphe de la fonction cosinus est



On retrouve la 2π-périodicité de la fonction cosinus. La parité de la fonction cosinus est aussi en évidence :
la fonction cosinus est paire et donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de la fonction cosinus.

Puisque la fonction cosinus est paire et 2π-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$. Sa dérivée est la fonction sinus qui est strictement positive sur $]0, \pi[$ et s'annule en 0 et π. Le tableau de variation de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ est

x	0	$\pi/2$	π
$\cos'(x)$	0	$-$	0
$\cos$	1 ↘	0	↘ -1

En particulier,

$$\text{la fonction cosinus est strictement décroissante sur } [0, \pi].$$

Enfin, la dérivée de la fonction cosinus qui est la fonction sinus s'annule en 0, π et plus généralement en tous les nombres de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cela se traduit pour le graphe de la fonction cosinus par une tangente parallèle à l'axe des abscisses en les points d'abscisses $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Un exemple d'étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x).$$

Périodicité. Pour tout réel x,

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2(x+2\pi)) - \cos(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) - \cos(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) = f(x).$$

La fonction f est périodique de période 2π.

Parité. Pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) = f(x).$$

La fonction f est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Domaine d'étude. Puisque la fonction f est 2π-périodique, on se contente de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$ par exemple. De plus, la fonction f est paire et on se contente de l'étudier sur $[0,\pi]$.

Dérivée. La fonction f est dérivable sur $[0,\pi]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,\pi]$ et pour tout réel x de $[0,\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\times(-2\sin(2x)) + \sin(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) \\ &= \sin(x)(-2\cos(x)+1). \end{aligned}$$

Sens de variation de f. Soit x un réel de $[0,\pi]$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } -2\cos(x)+1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}. \end{aligned}$$

Pour tout réel x de $]0,\pi[$, $\sin(x) > 0$ et donc pour tout réel x de $]0,\pi[$, $f'(x)$ est du signe de $-2\cos(x)+1$. Pour tout réel x de $]0,\pi[$,

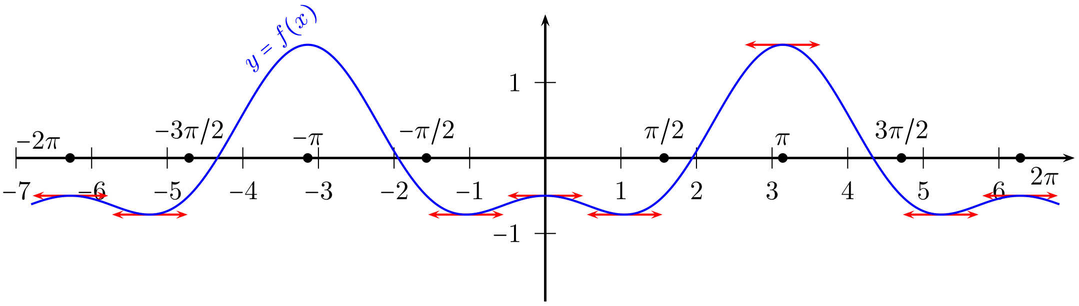
$$\begin{aligned} -2\cos(x)+1 > 0 &\Leftrightarrow -2\cos(x) > -1 \Leftrightarrow 2\cos(x) < 1 \Leftrightarrow \cos(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction cosinus sur } [0,\pi]). \end{aligned}$$

La dérivée de f est donc strictement négative sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, strictement positive sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ et s'annule en 0, $\frac{\pi}{3}$ et π. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

$f(0) = \frac{1}{2}\cos(0) - \cos(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$ et $f(\pi) = \frac{1}{2}\cos(2\pi) - \cos(\pi) = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$.

Graphe de f.



4) Fonctions du type $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$

Les fonctions du type $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ interviennent en physique dans un certain nombre de situations comme dans l'étude du pendule simple par exemple. La variable s'appelle t car elle désigne le temps.
A est l'amplitude, ω est la pulsation et φ est la phase.

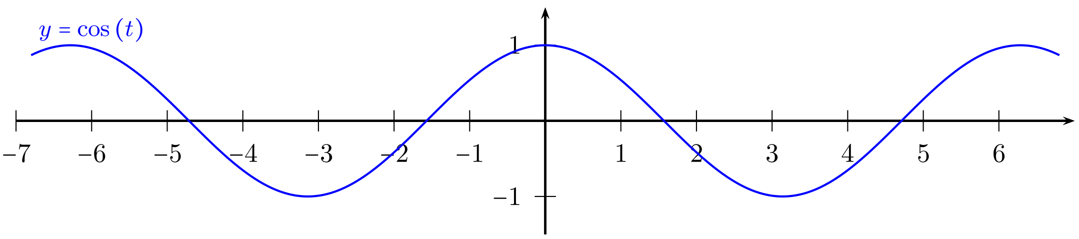
Modifier ω revient à modifier la période de la fonction :

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A\cos\left(\omega t + 2\pi + \varphi\right) = A\cos(\omega t + \varphi) = f(t).$$

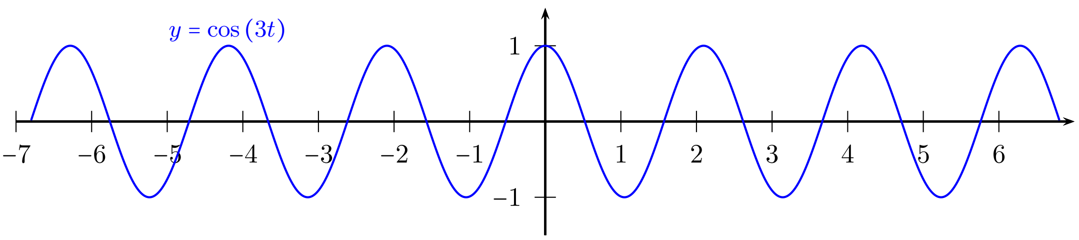
La fonction $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ est T-périodique où $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Si ω augmente, T diminue.

Exemple de tracé avec $A = 2$, $\omega = 3$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

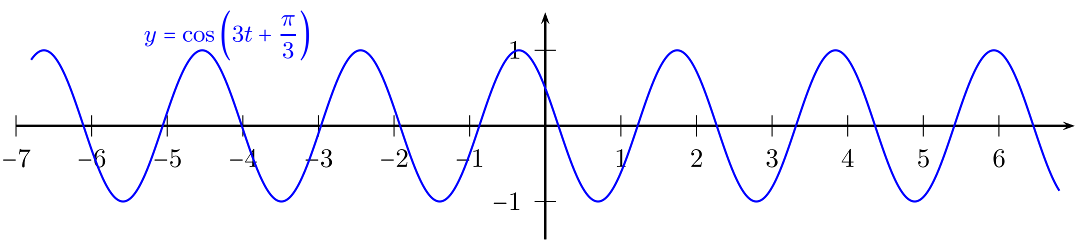
On rappelle le graphe de la fonction $t \mapsto \cos(t)$.



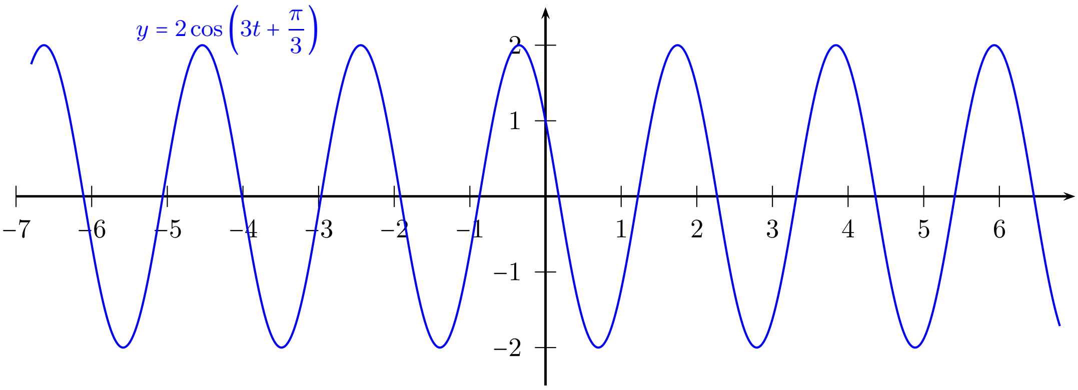
Voici le tracé du graphe de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t) = \cos(3t)$. En augmentant ω, la fréquence augmente ou encore la période diminue



Voici le tracé du graphe de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi) = \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Le graphe se déplace horizontalement.



Voici le tracé du graphe de la fonction $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi) = 2\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Les ordonnées sont multipliées par 2. L'amplitude de la sinusoïde augmente.



5) Primitives des fonctions trigonométriques

Théorème 19.
1) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(x) + k$ où k est un réel.
2) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\cos(x) + k$ où k est un réel.

Démonstration. 1) La fonction $F : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = \cos(x).$$

Donc F est une primitive de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$. On sait alors que les primitives de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(x) + k$ où k est un réel.

2) De même, la fonction $F : x \mapsto -\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x).$$

Donc F est une primitive de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$. On sait alors que les primitives de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\cos(x) + k$ où k est un réel.

Théorème 20.
1) Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.

a) Les primitives de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonction de la forme $x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$ où k est un réel.

b) Les primitives de la fonction $x \mapsto \sin(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonction de la forme $x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$ où k est un réel.

2) Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
a) Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$ sur I sont les fonction $x \mapsto \sin(u(x)) + k$ où k est un réel.
b) Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$ sur I sont les fonction $x \mapsto -\cos(u(x)) + k$ où k est un réel.

Démonstration. 1) a) Pour tout réel x, posons $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème 14, pour tout réel x

$$F'(x) = \frac{1}{a} \times a\cos(ax+b) = \cos(ax+b).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$. On sait alors que les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$ où k est un réel.

b) Pour tout réel x, posons $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème 14, pour tout réel x

$$F'(x) = -\frac{1}{a} \times (-a\sin(ax+b)) = \sin(ax+b).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$. On sait alors que les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$ où k est un réel.

2) a) Pour tout réel x de I, posons $F(x) = \sin(u(x))$. Puisque la fonction u est dérivable sur I, il en est de même de la fonction F d'après le théorème 14, et pour tout réel x de I

$$F'(x) = u'(x)\cos(u(x)).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$ sur I. On sait alors que les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(u(x)) + k$ où k est un réel.

b) Pour tout réel x de I, posons $F(x) = -\cos(u(x))$. Puisque la fonction u est dérivable sur I, il en est de même de la fonction F d'après le théorème 14, et pour tout réel x de I

$$F'(x) = -(-u'(x)\sin(u(x))) = u'(x)\sin(u(x)).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$ sur I. On sait alors que les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\cos(u(x)) + k$ où k est un réel.

Remarque. Avec les deux derniers théorèmes s'achèvent la liste des formules de primitives de terminale S.

Exercice 13.
1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1 \ : \ x \mapsto 3\sin(2x-1)$.
2) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_2 \ : \ x \mapsto \frac{3}{4}\cos\left(\frac{3}{5}x+2\right)$.

Solution. **1)** La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction F_1 définie pour tout réel x par

$$F_1(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\cos(2x-1)\right) = -\frac{3}{2}\cos(2x-1).$$

2) La fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ est la fonction F_2 définie pour tout réel x par

$$F_2(x) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{3}\sin\left(\frac{3}{5}x+2\right)\right) = \frac{5}{4}\sin\left(\frac{3}{5}x+2\right).$$

Exercice 14.
1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1 \ : \ x \mapsto x\sin(x^2+1)$.
2) Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f_2 \ : \ x \mapsto \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

Solution. **1)** La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_1 admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{1}{2} \times 2x\sin(x^2+1)$. Si on pose pour tout réel x, $u(x) = x^2+1$, alors pour tout réel x,

$$2x\sin(x^2+1) = u'\sin(u(x)).$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x\sin(x^2+1)$ est donc la fonction $x \mapsto -\cos(x^2+1)$ puis une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(x^2+1)$.

2) La fonction f_2 est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Donc la fonction f_2 admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

Pour tout réel x, $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos\left(\sqrt{x}\right)$. Si on pose pour tout réel strictement positif x, $u(x) = \sqrt{x}$, alors pour tout réel strictement positif x,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos\left(\sqrt{x}\right) = u'\cos(u(x)).$$

Une primitive de la fonction f_2 sur $]0,+\infty[$ est la fonction $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$.
