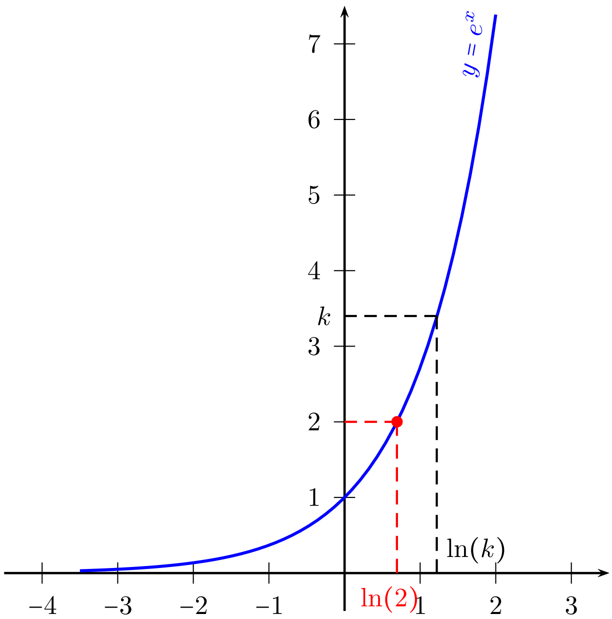
Chapitre 10. La fonction logarithme népérien

I. *Définition de la fonction logarithme népérien*

Au collège, nous savions résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $x^2 = 4$. Cette équation a une solution positive et une seule à savoir $x = 2$ car $2^2 = 4$. Mais pour résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $x^2 = 2$, nous n'avions pas de solution évidente de cette équation et nous avons dû créer une nouvelle fonction : la fonction racine carrée.
Une fois cette fonction crée, nous disposions d'un symbole pour résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $x^2 = 2$: cette équation admet une solution positive et une seule à savoir $x = \sqrt{2}$.
Nous ne connaissons pas la valeur exacte de $\sqrt{2}$ et nous devons prendre la calculatrice pour lire $\sqrt{2} = 1,414\ldots$

Le principe est le même avec la fonction exponentielle. A ce niveau du cours, on sait résoudre l'équation $e^x = 1$ (cette équation admet une solution et une seule à savoir $x = 0$) ou bien on sait résoudre l'équation $e^x = e^2$ (cette équation admet une solution et une seule à savoir $x = 2$).

Mais on ne sait pas encore résoudre l'équation $e^x = 2$. On crée pour cela une nouvelle fonction : la fonction **logarithme népérien**.



Graphiquement l'équation $e^x = 2$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. Cette solution est notée $\ln(2)$ par définition, $\ln(2)$ se lisant « logarithme népérien de 2 ». Le mot « népérien » vient du nom d'un mathématicien écossais John Neper qui inventa les logarithmes (Neper étant la version francisée du nom écossais Napier).
Nous ne connaissons pas la valeur exacte de $\ln(2)$ et nous devons prendre la calculatrice pour lire $\ln(2) = 0,693\ldots$

De manière générale, un corolaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer que pour tout réel strictement positif k, l'équation $e^x = k$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. Cette solution est par définition $\ln(k)$, le logarithme népérien du nombre réel strictement positif k. On peut énoncer :

Définition 1. Soit x un réel strictement positif. Le **logarithme népérien** de x est l'unique réel dont l'exponentielle est égale à x. Il est noté $\ln(x)$.
On définit ainsi une fonction sur $]0, +\infty[$, la fonction ln.

Par construction de la fonction logarithme népérien, on obtient le théorème suivant

Théorème 1. **1)** Pour tout réel a et tout réel strictement positif b, $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.
2) Pour tout réel strictement positif a et tout réel b, $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$.

Ceci a pour conséquence le théorème :

Théorème 2. **1)** Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
2) Pour tout réel strictement positif x, $e^{\ln(x)} = x$.

Démonstration. **1)** Soit x un réel et y un réel strictement positif.

$$y = \ln(e^x) \Leftrightarrow e^y = e^x \Leftrightarrow y = x,$$

et donc $\ln(e^x) = x$.

2) Soit x un réel strictement positif. Par définition, $\ln(x)$ est l'unique réel dont l'exponentielle est égale à x et donc $e^{\ln(x)} = x$.

Commentaire. On dit que la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien sont **réciproques** l'une de l'autre. C'est le même principe pour les fonctions « carré » et « racine carrée » : pour tous réels **positifs** a et b,

$$a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$$

et aussi pour tout réel **positif** x,

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \text{ et } \sqrt{x^2} = x.$$

Théorème 3. $\ln(1) = 0$.

En effet, l'unique réel dont l'exponentielle est égale à 1 est le réel 0.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{3x+1} = 5$.

2) $\ln(2x+3) = 2$.

Solution. **1)** Soit x un réel.

$$e^{3x+1} = 5 \Leftrightarrow 3x+1 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)-1}{3}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $e^{3x+1} = 5$ est $\left\{\dfrac{\ln(5)-1}{3}\right\}$.

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\ln(2x+3) = 2 &\Leftrightarrow 2x+3>0 \text{ et } 2x+3 = e^2 \Leftrightarrow 2x+3 = e^2 \text{ (car } e^2>0)\\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^2-3}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(2x+3) = 2$ est $\left\{\dfrac{e^2-3}{2}\right\}$.

II. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème 4. Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(x\times y) = \ln(x)+\ln(y)$.

Démonstration. Soient x et y deux réels strictement positifs. $\exp(\ln(x\times y)) = x\times y$ et

$$\exp(\ln(x)+\ln(y)) = \exp(\ln(x))\times\exp(\ln(y)) = x\times y.$$

Ainsi, les deux réels $\ln(x\times y)$ et $\ln(x)+\ln(y)$ ont la même exponentielle. On en déduit que ces deux réels sont égaux. On a donc montré que $\ln(x\times y) = \ln(x)+\ln(y)$.

---

2) Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Théorème 4.

1) Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(x\times y) = \ln(x)+\ln(y)$.

2) Pour tout réel strictement positif x, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

3) Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x)-\ln(y)$.

4) Pour tout réel strictement positif x et tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

5) Pour tout réel strictement positif x, $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Démonstration. On déduit les propriétés 2), 3) 4) et 5) de la relation fondamentale 1) et de l'égalité $\ln(1) = 0$.

2) Soit x un réel strictement positif.

$$\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0,$$

et donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

3) Soient x et y deux réels strictement positifs.

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

4) Soit x un réel strictement positif. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

• $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et montrons que $\ln\left(x^{n+1}\right) = (n+1)\ln(x)$.

$$\begin{aligned}\ln\left(x^{n+1}\right) &= \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x)\\ &= n\ln(x) + \ln(x) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)\ln(x).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Soit n un entier relatif négatif. Alors $-n$ est un entier positif puis

$$\begin{aligned}\ln(x^n) &= \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln\left(x^{-n}\right)\\ &= -(-n\ln(x)) \text{ (car } -n \text{ est positif)}\\ &= n\ln(x).\end{aligned}$$

On a montré que pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

5) Soit x un réel strictement positif.

$$2\ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) = \ln(x),$$

et donc $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Commentaire. On pouvait aussi déduire chacune des formules de 2) à 5) de la formule correspondante pour la fonction exponentielle en calculant à chaque fois l'exponentielle des deux membres de l'égalité à établir.

Ainsi, le logarithme népérien transforme un produit en somme (le logarithme népérien d'un produit est la somme des logarithmes) et l'exponentielle transforme les sommes en produit (l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles.

Plus généralement, le logarithme transforme toute notion liée à la multiplication en son équivalent pour l'addition. Par exemple, l'équivalent pour l'addition de la phrase « le produit d'un nombre non nul par son inverse est égal à 1 » est la phrase « la somme d'un nombre et de son opposé est 0 ».
Le logarithme transforme donc 1 en 0 et l'inverse en l'opposé.

le logarithme népérien transforme		
Les produits	en	**sommes**
$\ln(x \times y)$	$=$	$\ln(x) + \ln(y)$
Les quotients	en	**différences**
$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$=$	$\ln(x) - \ln(y)$
L'inverse	en	**l'opposé**
$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$=$	$-\ln(x)$
1	en	**0**
$\ln(1)$	$=$	0
$\ln(\underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}})$	en	$\underbrace{\ln(x) + \ldots + \ln(x)}_{n \text{ termes}}$
$\ln\left(x^n\right)$	$=$	$n\ln(x)$
La racine carrée	en	**la moitié**
$\ln\left(\sqrt{x}\right)$	$=$	$\dfrac{1}{2}\ln(x)$

l'exponentielle transforme		
Les sommes	en	**produits**
e^{x+y}	$=$	$e^x \times e^y$
Les différences	en	**quotients**
e^{x-y}	$=$	$\dfrac{e^x}{e^y}$
L'opposé	en	**l'inverse**
e^{-x}	$=$	$\dfrac{1}{e^x}$
0	en	**1**
e^0	$=$	1
$\exp(\underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ termes}})$	en	$\underbrace{e^x \times \ldots \times e^x}_{n \text{ facteurs}}$
e^{nx}	$=$	$(e^x)^n$
La moitié	en	**la racine carrée**
$e^{x/2}$	$=$	$\sqrt{e^x}$

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2) $B = \ln\left(3 - \sqrt{2}\right) + \ln\left(3 + \sqrt{2}\right)$.

Solution. **1)**

$$A = \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^2) - 2\ln(2^3) - \ln(2) = 2\ln(2) - 2 \times 3\ln(2) - \ln(2)$$
$$= -5\ln(2).$$

2)

$$B = \ln\left(3 - \sqrt{2}\right) + \ln\left(3 + \sqrt{2}\right) = \ln\left(\left(3 - \sqrt{2}\right)\left(3 + \sqrt{2}\right)\right) = \ln\left(3^2 - \sqrt{2}^2\right) = \ln(7).$$

III. Propriétés analytiques de la fonction logarithme népérien

1) Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème 5. La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\text{pour tout réel strictement positif } x,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration 1. Dans cette démonstration, on admet que ln est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel strictement positif x, on a $\exp(\ln(x)) = x$. En dérivant cette égalité, pour tout réel x strictement positif, on obtient

$$\exp'(\ln(x)) \times \ln'(x) = 1 \text{ puis } \exp(\ln(x)) \times \ln'(x) = 1 \text{ puis } x \times \ln'(x) = 1 \text{ et finalement } \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration 2. Soient x_0 et x deux réels strictement positifs et distincts. Posons $y_0 = \ln(x_0)$ et $y = \ln(x)$ de sorte que $x_0 = e^{y_0}$ et $x = e^y$. Puisque $x \neq x_0$, on a encore $e^y \neq e^{y_0}$ puis $y \neq y_0$. On peut donc écrire :

$$\frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{e^y - e_{y_0}} = \frac{1}{\dfrac{e^y - e^{y_0}}{y - y_0}}.$$

Dans cette démonstration, on admet la continuité de la fonction ln sur $]0, +\infty[$. Quand x tend vers x_0, $\ln(x)$ tend vers $\ln(x_0)$ ou encore y tend vers y_0. Par suite, puisque $\exp'(y_0) = e^{y_0} \neq 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{e^y - e^{y_0}}{y - y_0}} = \frac{1}{\exp'(y_0)} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Par suite, la fonction ln est dérivable en x_0 et $\ln'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \ln(x) - x + 1.$$

1) Etudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

2) En déduire la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$.

3) Vérifier que $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

Solution. **1)** La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}.$$

Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. En tenant compte de

$$f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0,$$

on en déduit le tableau de variations de le fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	+	0	−	
f	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

2) La position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est donnée par le signe de $\ln(x) - (x - 1)$ c'est-à-dire $f(x)$ en fonction de x.
D'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1]$. Donc, si $0 < x < 1$, alors $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$.
De même, la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et donc si $x > 1$, alors $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$.
Enfin, $f(1) = 0$.

En résumé, la fonction f est strictement négative sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et s'annule en 1. On en déduit que la droite $\mathscr{D}$

est strictement au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et d'autre part, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ ont un point commun et un seul, le point de coordonnées $(1,0)$ (car $\ln(1)=0$).

3) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est $y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)$. Or $\ln(1)=0$ et $\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$ (car pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$). Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est $y=x-1$. Cette tangente est donc la droite $\mathscr{D}$.

---

2) Interprétation de $\ln(x)$. Nouvelle définition de la fonction ln

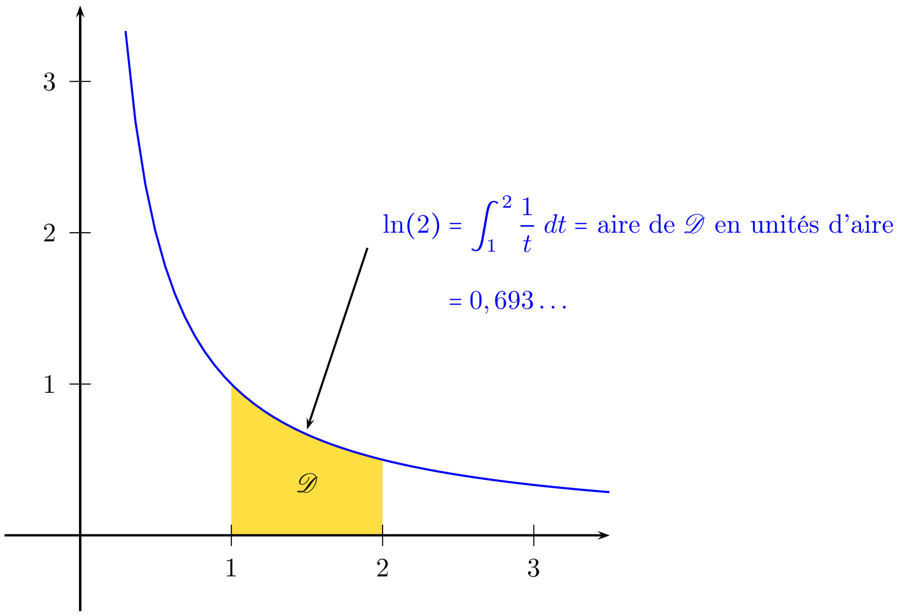
Le théorème 5 nous fournit un autre éclairage sur la fonction logarithme népérien. Nous aurions aussi pu prendre comme définition :

Définition 2. La fonction ln est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

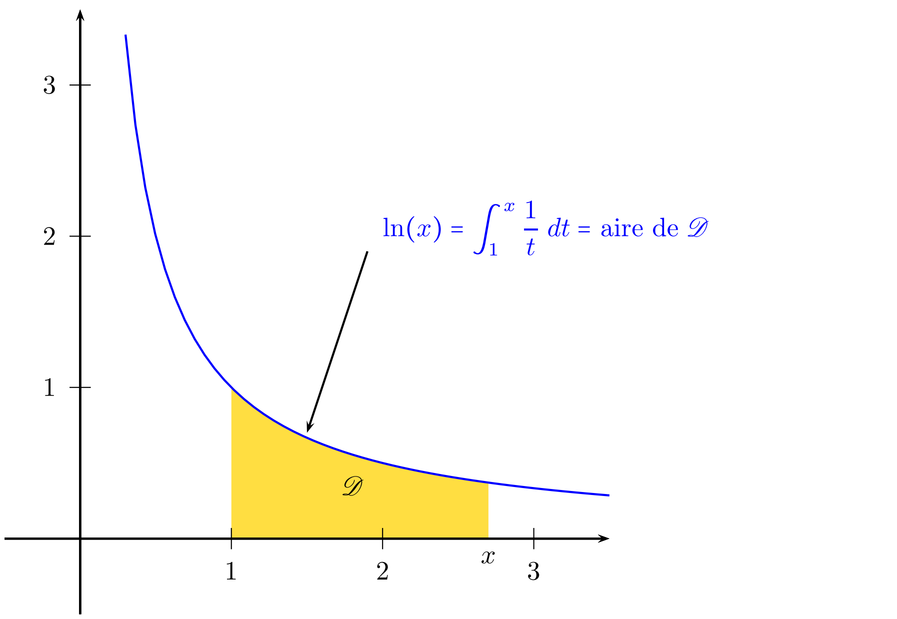
Dit autrement,

$$\text{pour tout réel } x>0,\ \ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

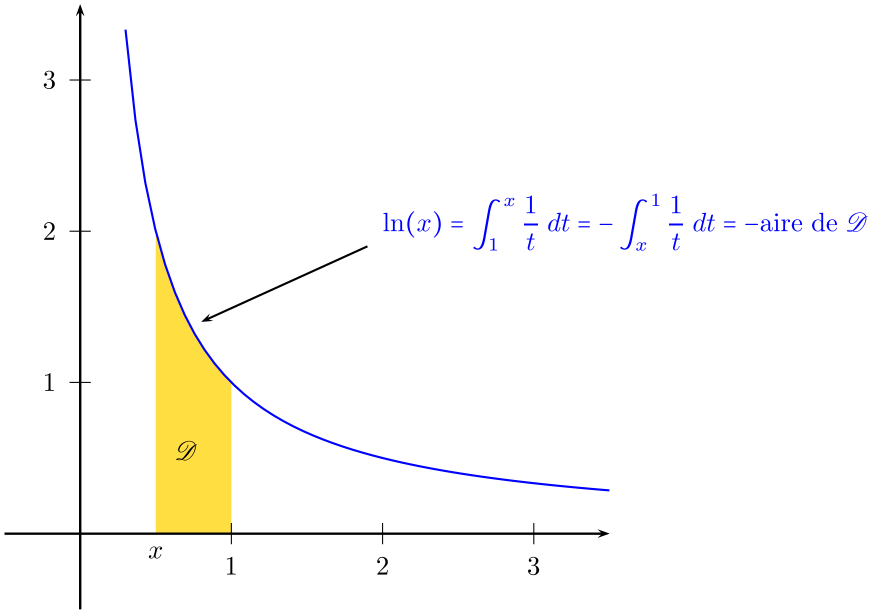
Par exemple, le nombre $\ln(2)$ est égal à $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$ c'est-à-dire l'aire du domaine du plan situé entre l'axe des abscisses et l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ d'une part et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ d'autre part.



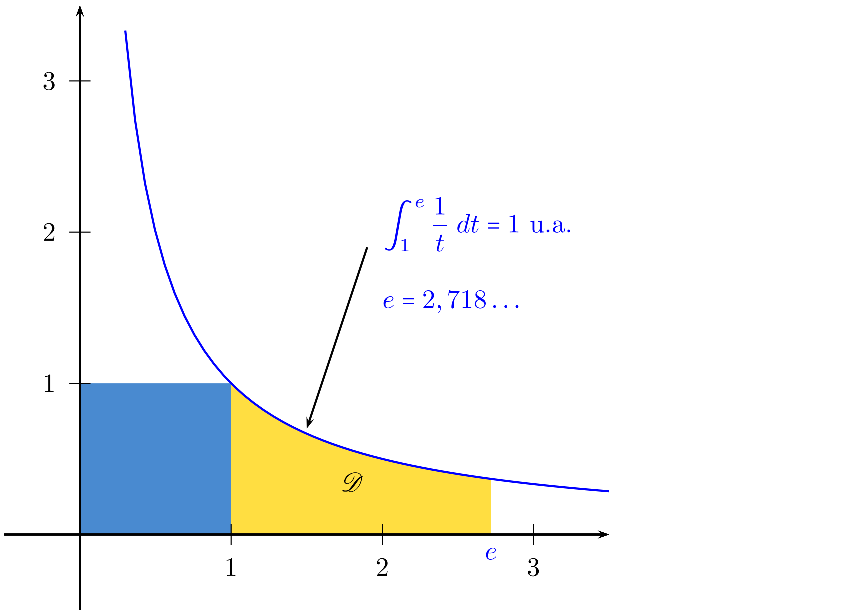
Plus généralement, si $x\geqslant 1$, $\ln(x)$ est l'aire de l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ et dont l'abscisse est comprise entre 1 et x,



et si $0 < x < 1$, $\ln(x)$ est l'opposé de l'aire de l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et dont l'abscisse est comprise entre x et 1. Par exemple, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2) = -0,693\ldots$.



Notons enfin une interprétation géométrique du nombre e. e est le réel strictement plus grand que 1 tel que le domaine $\mathscr{D}$ ait une aire égale à une unité d'aire.



3) Sens de variation de la fonction logarithme népérien

Théorème 6. La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Démonstration. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. $\ln'$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Le théorème précédent a des conséquences pour la résolution des équations et des inéquations.

Théorème 7. **1) a)** Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.
b) Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
2) Pour tout réel strictement positif x, $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Exercice 4. **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+3) = \ln(x+7)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x+3) > \ln(x+7)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x+3) < \ln(x+7)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5x+10) = \ln(x-2)$.

Solution. **1)** Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\ln(2x+3)=\ln(x+7) &\Leftrightarrow x+7>0 \text{ et } 2x+3=x+7 \Leftrightarrow x=4 \text{ et } x+7>0\\ &\Leftrightarrow x=4 \text{ (car } 4+7>0).\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(2x+3)=\ln(x+7)$ est $\{4\}$.

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\ln(2x+3)>\ln(x+7) &\Leftrightarrow x+7>0 \text{ et } 2x+3>x+7 \Leftrightarrow x>-7 \text{ et } x>4\\ &\Leftrightarrow x>4.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(2x+3)>\ln(x+7)$ est $]4,+\infty[$.

3) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\ln(2x+3)<\ln(x+7) &\Leftrightarrow 2x+3>0 \text{ et } x+7>2x+3 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2} \text{ et } x<4\\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<4.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(2x+3)<\ln(x+7)$ est $\left]-\frac{3}{2},4\right[$.

4) Soit x un réel.

$$\ln(5x+10)=\ln(x-2) \Leftrightarrow x-2>0 \text{ et } 5x+10=x-2 \Leftrightarrow x=-3 \text{ et } x-2>0$$

Puisque $-3-2$ n'est pas strictement supérieur à 0, l'équation $\ln(5x+10)=\ln(x-2)$ n'a pas de solution.

Exercice 5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geqslant 10^9$.

Solution. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}2^n \geqslant 10^9 &\Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln(10^9) \text{ (par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[)\\ &\Leftrightarrow n\ln(2) \geqslant 9\ln(10)\\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \text{ (car } 2>1 \Rightarrow \ln(2)>\ln(1) \Rightarrow \ln(2)>0)\\ &\Leftrightarrow n \geqslant 29,8\ldots\\ &\Leftrightarrow n \geqslant 30 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).}\end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geqslant 10^9$ est 30.

---

4) Limites de $\ln(x)$ en 0 et $+\infty$

Théorème 8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=-\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Pour $x>e^A$, on a $\ln(x)>\ln(e^A)$ ou encore $\ln(x)>A$. Ainsi, tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient $\ln(x)$ pour x suffisamment grand. Ceci montre que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty.$$

Ensuite, en posant $X=\frac{1}{x}$, on obtient

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=\lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right)=\lim_{X\to+\infty} -\ln(X)=-\infty.$$

Exercice 6.
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2\ln(x)-3\right)$.
2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\ln(x)-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solution. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)=+\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3=+\infty$. En additionnant les deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+2\ln(x)-3=+\infty$.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-\dfrac{1}{x}=-\infty$. En additionnant les deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\ln(x)-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

---

5) Deux théorèmes de croissances comparées

Quand x tend vers $+\infty$, $\ln(x)$ tend vers $+\infty$ et x tend vers $+\infty$. Nous ne savons donc momentanément pas calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$ puisque nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Le théorème suivant lève cette indétermination et une autre indétermination.

Théorème 9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)=0$.

Démonstration. En posant $X=\ln(x)$ de sorte que $x=e^X$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X/X}=0,$$

car $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$. Puis en posant $X=\dfrac{1}{x}$,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right)=\lim_{X\to+\infty}-\frac{\ln(X)}{X}=0,$$

Les deux fonctions $x\mapsto\ln(x)$ et $x\mapsto x$ tendent vers $+\infty$ en croissant. Mais la croissance de la fonction $x\mapsto\ln(x)$ vers $+\infty$ est bien plus lente que celle de la fonction $x\mapsto x$. La fonction $x\mapsto x$ l'emporte sur la fonction $x\mapsto\ln(x)$ en $+\infty$ et on a de même, en 0.

Exercice 7.
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(x)\right)$.
2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\ln(x)+\dfrac{1}{x}\right)$.

Solution. 1) Pour tout réel $x>0$, $x-\ln(x)=x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

En multipliant les deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$.

2) Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1+x\ln(x)}{x}=\dfrac{1}{x}\times(1+x\ln(x))$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)=0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}1+x\ln(x)=1$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$

En multipliant les deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\ln(x)+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\times(1+x\ln(x))=+\infty$.

---

6) Graphe de la fonction logarithme népérien

• On connaît déjà le sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0,+\infty[$ ainsi que les limites de cette fonction en 0 et $+\infty$. On peut résumer ces différents résultats dans un tableau de variations.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

• Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, l'axe (Oy) est asymptote à la courbe représentative de ln.

• On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction logarithme népérien a la même allure que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Attention, on peut montrer que $\ln(x)$ tend vers $+\infty$ beaucoup lentement que $\sqrt{x}$ ou encore on peut montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

• $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$. Ecrivons explicitement la limite que fournit cette égalité. Pour tout réel strictement positif x, $\dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ et donc

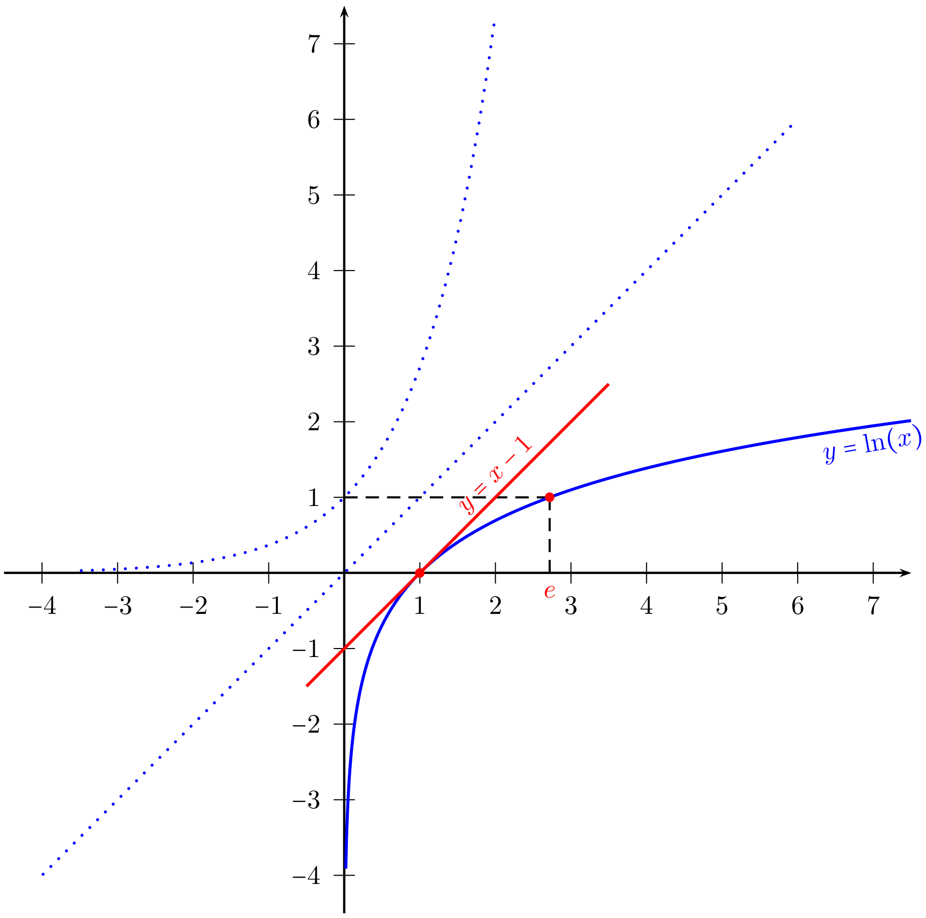
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1,$$

ou aussi en posant $x = 1 + h$ où cette fois-ci h tend vers 0,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1,$$

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de ln au point de coordonnées $(1,0)$ est égal à 1. Cette tangente est donc la droite d'équation $y = x - 1$.

Voici le graphe de la fonction logarithme népérien.



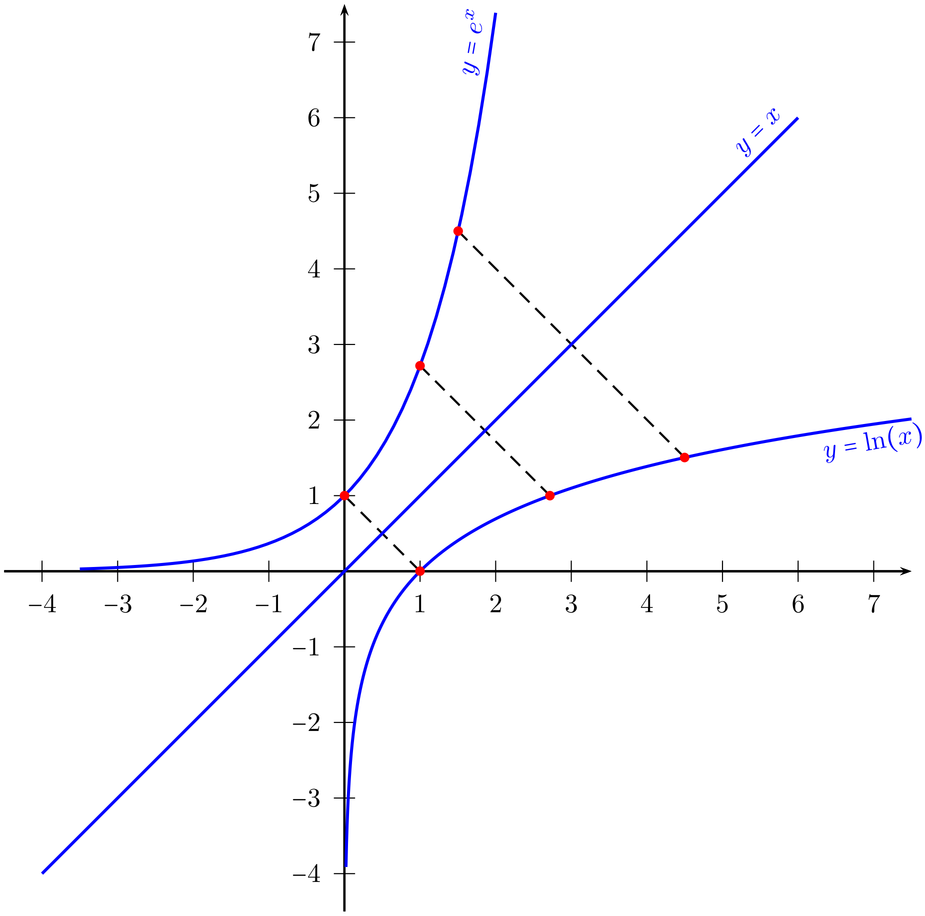
On va voir que le graphe de la fonction logarithme népérien se déduit simplement du graphe de la fonction exponentielle. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln et $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Soient x un réel strictement positif puis y un réel. Soient A le point de coordonnées (x,y) et B le point de coordonnées (y,x). Les points A et B sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$. De plus,

$$A \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y \Leftrightarrow B \in \mathscr{C}'.$$

Ainsi, un point du plan appartient à la courbe représentative de la fonction ln si et seulement si son symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$ appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle. Cela signifie que les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Ainsi, par exemple, les points de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(e,1)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction logarithme et leurs symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$, à savoir les points de coordonnées respectives $(0,1)$ et $(1,e)$, appartiennent à la courbe représentative de la fonction exponentielle.



Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution. 1) Soit n un entier naturel non nul.

$$v_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et donc, d'après une limite de cours, en posant $h = \dfrac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Enfin, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \ln(u_n)$ et donc $u_n = e^{v_n}$. Puisque v_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que u_n tend vers $e^1 = e$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

---

7) Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Le théorème de dérivation d'une fonction composée fournit immédiatement :

Théorème 10. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I. Soit f la fonction définie sur I par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ f(x) = \ln(u(x)).$$

La fonction f est dérivable sur I et

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

On retiendra

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Exercice 9. Pour tout réel x de $]-1,1[$, on pose :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.

Solution. Pour $x \in]-1,1[$, posons $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ de sorte que pour tout x de $]-1,1[$, $f(x) = \ln(u(x))$.
Puisque pour tout x de $]-1,1[$, on a $1-x \neq 0$, la fonction u est dérivable sur $]-1,1[$ en tant que fonction rationnelle définie sur $]-1,1[$. De plus, pour tout x de $]-1,1[$, on $1+x>0$ et $1-x>0$ et donc, pour tout x de $]-1,1[$, $u(x)>0$.

En résumé, la fonction u est dérivable sur $]-1,1[$ et strictement positive sur $]-1,1[$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$.

1 ère dérivation. Pour tout x de $]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} &= \frac{\dfrac{1\times(1-x)-(1+x)\times(-1)}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} \\ &= \frac{2(1-x)}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}. \end{aligned}$$

2 ème dérivation. Pour tout x de $]-1,1[$, on a $1+x>0$ et $1-x>0$. On peut donc écrire

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-1,1[,\ f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

puis pour tout x de $]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

---

8) Primitives

Théorème 11. **1)** Les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(x)+k$ où k est un réel.
2) Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I.
Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(u(x))+k$ où k est un réel.

On retiendra

$$\text{si } u>0, \text{ une primitive de } \frac{u'}{u} \text{ est } \ln(u).$$

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, justifier le fait que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle I puis fournir une primitive de f :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. **1)** Pour $x>-1$, posons $u(x)=x+1$. Alors, u est dérivable sur $]-1,+\infty[$ puis pour tout réel $x>-1$, $u'(x)=1$. Par suite, pour tout réel $x>-1$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. De plus, la fonction u est strictement positive sur $]-1,+\infty[$. Une primitive de la fonction f sur $]-1,+\infty[$ est la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.

2) Pour tout réel $x<0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1}{-x}$.
Pour $x<0$, posons $u(x)=-x$. Alors, u est dérivable sur $]-\infty,0[$ puis pour tout réel $x<0$, $u'(x)=-1$. Par suite, pour tout réel $x<0$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. De plus, la fonction u est strictement positive sur $]-\infty,0[$. Une primitive de la fonction f sur $]-\infty,0[$ est la fonction $x \mapsto \ln(-x)$.

3) Pour tout réel $x>\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{2x-1}$.
Pour $x>\dfrac{1}{2}$, posons $u(x)=2x-1$. Alors, u est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ puis pour tout réel $x>\dfrac{1}{2}$, $u'(x)=2$. Par suite, pour tout réel $x>\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. De plus, la fonction u est strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. Une primitive de la fonction f sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$.

4) Pour tout réel x, posons $u(x)=x^2+x+1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta=1^2-4=-3<0$. Donc, le trinôme x^2+x+1 est de signe constant sur $\mathbb{R}$ égal au signe du coefficient de x^2. Par suite, pour tout réel x, $x^2+x+1>0$.

En particulier, pour tout réel x, $u(x)\neq 0$ et donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Donc, une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$.

5) Pour tout réel x, posons $u(x)=e^x+1$. Alors, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis pour tout réel x, $u'(x)=e^x$. Par suite, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. De plus, pour tout réel x, $e^x+1>1$ et en particulier, la fonction u est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln\left(e^x+1\right)$.

IV. Le logarithme décimal

Définition 3. Soit x un réel strictement positif.
Le logarithme décimal du réel x, noté $\log_{10}(x)$ ou plus simplement $\log(x)$, est
$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

On note que $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$ et plus généralement, pour tout entier relatif n,
$$\log\left(10^n\right) = \frac{\ln\left(10^n\right)}{\ln(10)} = \frac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n.$$

Ainsi, le rôle que tenait le nombre e pour la fonction logarithme népérien ($\ln(e) = 1$ et plus généralement, pour tout entier relatif n, $\ln\left(e^n\right) = n$) est maintenant tenu par le nombre 10 pour la fonction logarithme décimal.

Voici un tableau de valeurs :

x	$0,001$	$0,01$	$0,1$	1	10	47	89	100	1000
$\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	$1,67\ldots$	$1,94\ldots$	2	3

Le logarithme décimal a les mêmes propriétés algébriques que le logarithme népérien ($\log(1) = 0$, $\log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$, ...).

De la même manière que l'on définit e^x pour x réel, on peut définir 10^x pour x réel de sorte que les deux fonctions $x \mapsto \log(x)$ et $x \mapsto 10^x$ sont réciproques l'une de l'autre mais on doit noter que la fonction $x \mapsto 10^x$ n'est pas au programme de la classe de terminale S en mathématiques.

Les physiciens utilisent le logarithme décimal dans différentes situations. Citons

• le pH pour mesurer l'acidité. Le pH est : moins le logarithme décimal de la concentration en ions H_3O^+.
$$\text{pH}= -\log\left(\left[H_3O^+\right]\right).$$

On passe du pH à la concentration en H_3O^+ et vice versa grâce à l'équivalence
$$\text{pH}= -\log\left(\left[H_3O^+\right]\right) \Leftrightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-\text{pH}}.$$

• les décibels pour mesurer par exemple les intensités sonores. Si P_0 et P_1 sont deux puissances, la valeur du rapport de puissances exprimé en decibels (dB) est $10\log\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)$.