Chapitre 7. Fonctions dérivables
(rappels et compléments)

I. Nombre dérivé

1) Nombre dérivé en un point (rappels)

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel élément de l'intervalle I.
La fonction f est **dérivable** en a si et seulement si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite réelle quand h tend vers 0.
Quand f est dérivable en a, le nombre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$. Ainsi,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le taux d'accroissement de f en a. Le nombre dérivé est la valeur limite de ce taux.

Remarque. En posant $x=a+h$ de sorte que $h=x-a$ et que h tend vers 0 si et seulement si x tend vers a, on obtient

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

C'est avec la définition 1 que l'on établit les différentes formules de dérivation données en 1ère S. Un formulaire de dérivées usuelles sera rappelé et complété plus loin.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x)=x^2$. Soit a un réel.
Pour tout réel h différent de 0,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h.$$

Par suite, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a$. La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a)=2a$.
En utilisant l'autre notation, le calcul aurait changé d'aspect mais bien sûr le résultat final n'aurait pas changé. Pour tout réel x différent de a

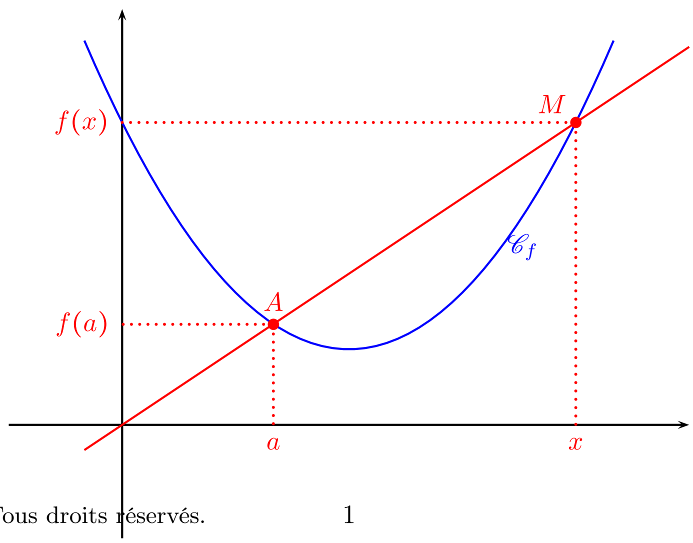
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=x+a$$

et on retrouve $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=2a$.

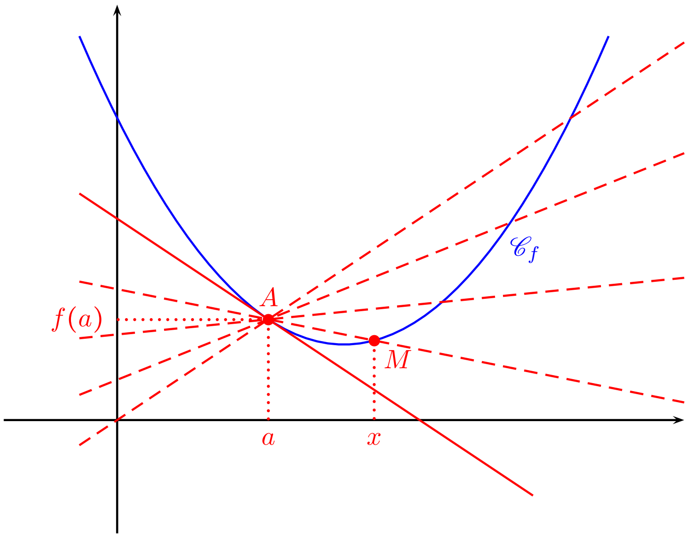
2) Tangente à une courbe en un point

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On se donne un réel a élément de l'intervalle I.

Pour tout réel x de l'intervalle I, différent du réel a, le nombre $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur (ou encore la pente) de la droite passant par les points $A(a,f(a))$ et $M(x,f(x))$.



On suppose maintenant que f est dérivable en a. Par définition, le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie quand x tend vers a, limite qui est le nombre réel $f'(a)$. Graphiquement, quand x tend vers a, le point M tend vers le point A puis la droite (AM) tend vers une droite limite appelée la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.



Ainsi, par définition

$$f'(a) \text{ est le coefficient directeur de la tangente à } \mathscr{C}_f \text{ en son point d'abscisse } a.$$

Théorème 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel élément de I.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On suppose que f est dérivable en a. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point $A(a, f(a))$ est

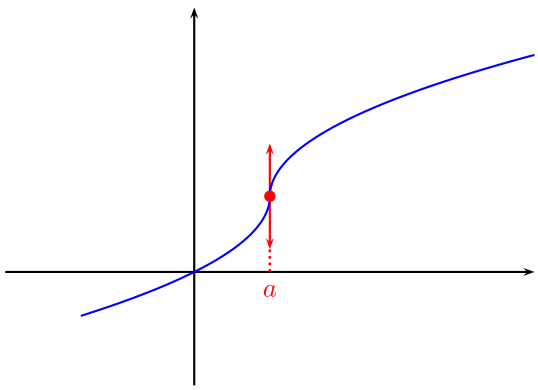
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration. Si x_0, y_0 et m sont trois réels, on sait qu'une équation de la droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et de coefficient directeur m est $y = m(x - x_0) + y_0$.
Ici, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$. On en déduit le résultat.

Remarque 1. Il n'est pas obligatoire que la fonction f soit dérivable en a pour que sa courbe représentative admette une tangente en son point d'abscisse a. En effet, si

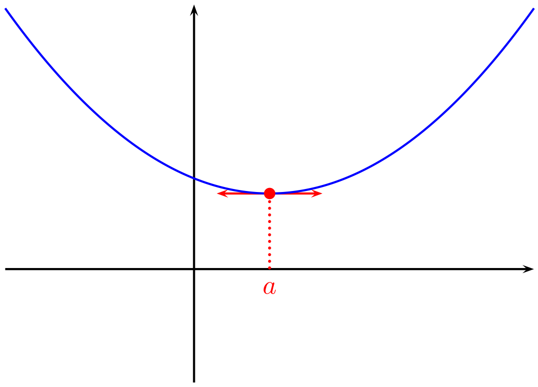
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty,$$

la fonction f n'est pas dérivable en a. Néanmoins la droite joignant les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ tend vers une droite limite qui est la droite passant par a et parallèle à l'axe des ordonnées. Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour tangente en son point d'abscisse a.



Remarque 2. Une droite est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur est nul. Comme le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a est $f'(a)$, on obtient

La tangente en $A(a, f(a))$ est parallèle à (Ox) si et seulement si $f'(a) = 0$.



Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 3.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 3$.
$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2$ et $f'(3) = 2 \times 3 - 3 = 3$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 3 est $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ ou encore $y = 3(x-3) + 2$ ou enfin

$$y = 3x - 7.$$

---

3) Lien avec la continuité

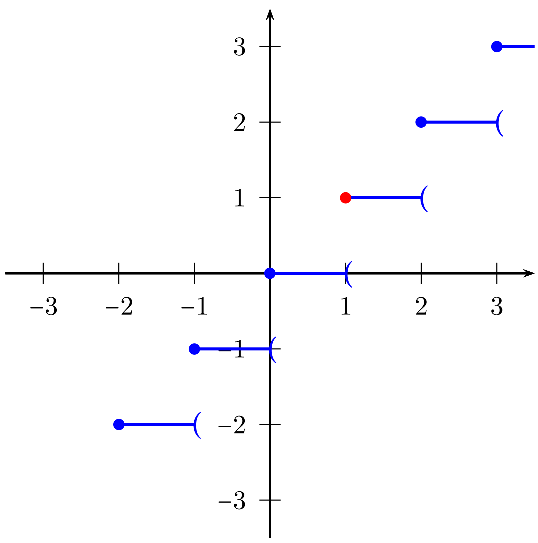
Si f est dérivable en a, le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite réelle quand x tend vers a. Le dénominateur de ce rapport, à savoir $x - a$, tend vers 0 quand x tend vers a. Pour que ce rapport ait une chance d'avoir une limite réelle, il est obligatoire que le numérateur, à savoir $f(x) - f(a)$, tende aussi vers 0 (nous sommes alors en présence d'une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$) et donc il est obligatoire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. D'où :

Théorème 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel élément de I.
Si f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Ce théorème signifie qu'une fonction discontinue en a ne peut en aucun cas être dérivable en a. Une fonction est d'abord continue ou discontinue en a puis, si elle est continue en a, elle peut encore être dérivable en a ou ne pas être dérivable en a.

4) Exemples de fonctions non dérivables en un point

Exemple 1. Une fonction discontinue en un point constitue un premier exemple de fonction non dérivable en un point. Par exemple, voici le graphe de la fonction partie entière.



La fonction partie entière n'est pas dérivable en 1 car la fonction partie entière n'est pas continue en 1. Analysons cette phrase numériquement. Soit $x \in]0,1[$,

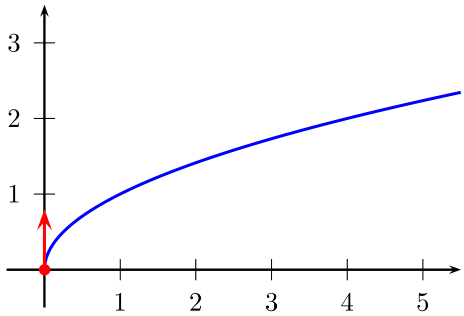
$$\frac{E(x) - E(1)}{x - 1} = \frac{0 - 1}{x - 1} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $x - 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures puis $\frac{1}{x-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $-\frac{1}{x-1}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, le rapport $\frac{E(x) - E(1)}{x - 1}$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers 1 et donc la fonction partie entière n'est pas dérivable en 1.

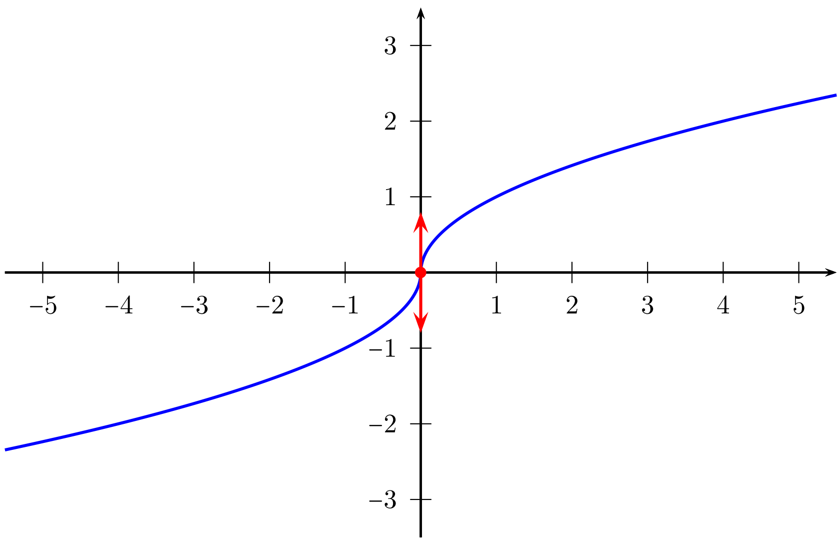
Exemple 2. Une fonction dont le graphe admet une tangente parallèle à (Oy) en un point d'abscisse a n'est pas dérivable en a. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ et en particulier continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Néanmoins, son graphe admet en son point d'abscisse 0 une tangente parallèle à (Oy) ou encore la tangente en O est l'axe (Oy).



Si on veut un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe admet en O une tangente parallèle à (Oy), on peut par exemple considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$.



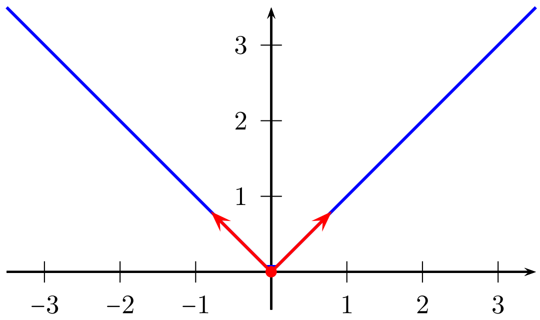
Exemple 3. Une fonction dont le graphe admet en un point une tangente à droite et une tangente à gauche de directions différentes, n'est pas dérivable en ce point. La fonction valeur absolue est un exemple de telle fonction. En effet, si x est un réel strictement positif,

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$$

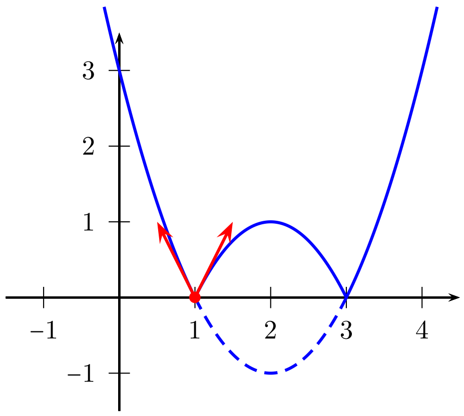
et si x est un réel strictement négatif

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Donc quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le rapport $\dfrac{|x|-|0|}{x-0}$ tend vers 1 et quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, le rapport $\dfrac{|x|-|0|}{x-0}$ tend vers -1. Mais alors, le rapport $\dfrac{|x|-|0|}{x-0}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.
Par contre, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = 1$, on peut dire que le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$ admet en O à droite une **demi-tangente** de coefficient directeur 1 et puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = -1$, on peut dire que le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$ admet en O à gauche une **demi-tangente** de coefficient directeur -1.



Si on veut un exemple avec une courbe « qui soit courbe », on peut considérer la fonction $x \mapsto |x^2-4x+3|$ dont voici le graphe.



En son point d'abscisse 1, la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes de directions différentes et donc la fonction f n'est pas dérivable en 1. Le point de la courbe d'abscisse 1 est un **point anguleux** de cette courbe.

II. Fonction dérivée

1) Fonction dérivable sur un intervalle et fonction dérivée

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction f est **dérivable** sur I si et seulement si la fonction f est dérivable en chaque réel x de I.
La fonction, notée f', qui à chaque réel x associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x, s'appelle la **fonction dérivée** de la fonction f sur l'intervalle I.

En première S, on a donné un certain nombre de formules donnant directement la dérivée d'une fonction sans avoir à revenir à la limite en a du rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On rappellera ces formules au paragraphe 3) après en avoir établi de nouvelles au paragraphe 2).

2) De nouvelles formules de dérivation (dérivée d'une composée)

a) Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

Théorème 3. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels. Soit J un intervalle tel que pour tout réel x de J, $ax+b$ appartient à I. Soit g la fonction définie sur J par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } J,\ g(x) = f(ax+b).$$

La fonction g est dérivable sur J et

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } J,\ g'(x) = a \times f'(ax+b).$$

Le résultat précédent s'écrit en abrégé

$$(f(ax+b))' = af'(ax+b).$$

Démonstration. Si $a=0$, la fonction $x \mapsto f(ax+b) = f(b)$ est constante sur J. On sait depuis la première S que sa dérivée est nulle. La formule de dérivation est donc vraie quand $a=0$ car pour tout x de J, $0 \times f'(ax+b) = 0$.

On suppose dorénavant $a \neq 0$. Soient x_0 un réel de J puis $y_0 = ax_0 + b$. Soient x un réel de J différent de x_0 puis $y = ax+b$.

Puisque $a \neq 0$ et $x \neq x_0$, on a encore $y \neq y_0$ (car $ax+b = ax_0+b \Leftrightarrow ax = ax_0 \Leftrightarrow x = x_0$) et

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(ax+b)-f(ax_0+b)}{x-x_0} = \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} \times \frac{y-y_0}{x-x_0}.$$

avec

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = a,$$

et donc

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = a\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}.$$

Quand x tend vers x_0, y tend vers y_0 puis $\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$ tend vers $f'(y_0)$. On en déduit que $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $a \times f'(y_0)$ ou encore $a \times f'(ax_0+b)$.

On a montré que la fonction g est dérivable en x_0 et que $g'(x_0) = a \times f'(ax_0+b)$. Finalement, g est dérivable sur l'intervalle J et pour tout x de J, $g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = (2x+3)^4.$$

Pour tout réel x, $f(x) = g(2x+3)$ où, pour tout réel y, $g(y) = y^4$. Pour tout réel x, on a alors (en posant momentanément $y = 2x+3$)

$$f'(x) = 2 \times g'(2x+3) = 2 \times g'(y) = 2 \times 4y^3 = 2 \times 4(2x+3)^3 = 8(2x+3)^3.$$

Il ne faut donc pas confondre $(f(ax+b))'$ et $f'(ax+b)$. Si par exemple, f est la fonction $y \mapsto y^4$, $f'(ax+b)$ est la valeur en $ax+b$ de la dérivée f' de la fonction f c'est-à-dire $4(ax+b)^3$ alors que $(f(ax+b))'$ est la valeur en x de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ c'est-à-dire $a \times 4(ax+b)^3$.

b) Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Théorème 4. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \sqrt{u(x)}.$$

La fonction f est dérivable sur I et pour tout x de I,

$$\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Le résultat précédent s'écrit en abrégé

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Démonstration. Soit x_0 un réel élément de I. Soit x un réel élément de I et distinct de x_0.
Les deux nombres $\sqrt{u(x_0)}$ et $\sqrt{u(x)}$ existent et sont strictement positifs. On en déduit que la somme $\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}$ existe et est strictement positive et en particulier n'est pas nulle.

On peut donc multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0}$ par la quantité conjuguée du numérateur à savoir $\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}$. On obtient

$$\frac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}\right)\left(\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}\right)} = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \times \frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}},$$

Quand x tend vers x_0, $\dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{u(x_0)}}$ car la fonction $x\mapsto \sqrt{u(x)})$ est continue en x_0 et car $2\sqrt{u(x_0)}$ n'est pas nul.

Donc, quand x tend vers x_0, $\dfrac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0}$ tend vers $\dfrac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$.

On a montré que la fonction f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)=\dfrac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$. Finalement, f est dérivable sur I et pour tout x de I, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Exemple. Pour tout réel x, posons $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. Tout d'abord, le discriminant du trinôme x^2+x+1 est $\Delta=1^2-4=-3<0$. On sait alors que le trinôme x^2+x+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et que ce signe est le signe du coefficient de x^2 à savoir 1. Donc,

$$\text{pour tout réel } x,\ x^2+x+1>0.$$

Par suite, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. $f(x)$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+x+1$. Puisque la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$, le théorème précédent montre que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\text{pour tout réel } x,\ f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Exercice 2. Pour tout réel x, on pose $f(x)=\sqrt{x^3-x^4}$.
1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Etudier la continuité de f.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
4) Etudier la dérivabilité de f en 1.
5) Que pouvez-vous dire des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 1 ?
6) Etudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée f'.
7) Construire le graphe de f avec la calculatrice.

Solution. 1) Pour tout réel x, $x^3-x^4=x^3(1-x)$. Etudions le signe de cette expression grâce à un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x^3(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Soit x un réel. $f(x)$ existe si et seulement si $x^3-x^4\geqslant 0$. D'après le tableau de signes ci-dessus, ceci équivaut à $x\in[0,1]$.

Le domaine de définition de la fonction f est $[0,1]$.

2) Pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^3-x^4$. La fonction u est continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynôme et positive sur $[0,1]$. Donc la fonction f est continue sur $[0,1]$.

3) Dérivabilité en 0 (à droite). Soit $x\in]0,1]$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\frac{\sqrt{x^3(1-x)}}{x}=\frac{\sqrt{x^3}}{x}\times\sqrt{1-x}\ (\text{car } x^3\geqslant 0 \text{ et } 1-x\geqslant 0)\\&=\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^2}}\times\sqrt{1-x}=\sqrt{\frac{x^3}{x^2}}\times\sqrt{1-x}=\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}=\sqrt{x-x^2}.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\sqrt{x-x^2}$ tend vers 0 et donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 0. On en déduit que la fonction f est dérivable en 0 (à droite) et que $f'(0)=0$.

4) Dérivabilité en 1 (à gauche). Soit $x \in [0,1[$.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3(1-x)}}{-(1-x)} = -\frac{\sqrt{1-x}}{1-x} \times \sqrt{x^3} \text{ (car } 1-x \geqslant 0 \text{ et } x^3 \geqslant 0)$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}} \times \sqrt{x^3} = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \sqrt{x^3}.$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\sqrt{1-x}$ tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ tend vers $+\infty$. D'autre part, $\sqrt{x^3}$ tend vers 1 et donc $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 1.

5) Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

• La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Donc, $\mathscr{C}_f$ admet au point de coordonnées $(0, f(0))$ ou encore $(0,0)$ une tangente parallèle à (Ox) : l'axe (Ox) est tangent à $\mathscr{C}_f$ en O.

• La fonction f n'est pas dérivable en 1. Néanmoins, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à (Oy) au point de coordonnées $(1, f(1))$ ou encore $(1,0)$: la droite d'équation $x = 1$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point de coordonnées $(1,0)$.

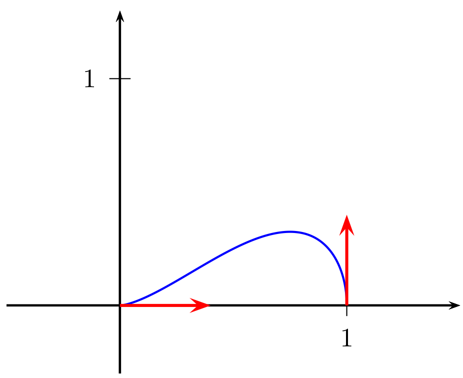
6) Dérivablilité sur $]0,1[$**.** f est de la forme $\sqrt{u}$ avec pour tout x de $[0,1]$, $u(x) = x^3 - x^4 = x^3(1-x)$. D'après la question 1), la fonction u est strictement positive sur $]0,1[$. Comme la fonction u est de plus dérivable sur $]0,1[$, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout réel x de $]0,1[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3x^2-4x^3}{2\sqrt{x^3(1-x)}} = \frac{x^2(3-4x)}{2\sqrt{x^3}\sqrt{1-x}} \text{ (car } x^3 > 0 \text{ et } 1-x > 0)$$
$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} \times \frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{x^3}} \times \frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}} = \sqrt{\frac{x^4}{x^3}} \times \frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}.$$

En résumé, f est dérivable sur $]0,1[$ et en 0 à droite et donc f est dérivable sur $[0,1[$. De plus, si $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}$ et d'autre part, $f'(0) = 0$. Comme $\frac{\sqrt{0}(3-4\times 0)}{2\sqrt{1-0}} = 0$, on a finalement pour tout x de $[0,1[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0,1[\text{ et pour tout } x \text{ de } [0,1[,\ f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}.}$$

7) Graphe de f**.**



c) Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Théorème 5. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f la fonction définie sur I par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ f(x) = (u(x))^n.$$

La fonction f est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \text{ de } I,\ f'(x) = n \times (u(x))^{n-1} \times u'(x).$$

Si de plus, u ne s'annule pas sur I, la formule précédente est valable pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

En particulier, si pour tout x de I, $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, alors

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$

Le résultat précédent s'écrit en abrégé

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

Démonstration. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Montrons le résultat quand $n = 2$. Soit x_0 un réel élément de I. Soit x un réel élément de I distinct de x_0.

$$\frac{(u(x))^2 - (u(x_0))^2}{x - x_0} = \frac{(u(x) - u(x_0))(u(x) + u(x_0))}{x - x_0} = (u(x) + u(x_0))\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

La fonction u est dérivable en x_0 et en particulier, la fonction u est continue en x_0. Donc, $u(x) + u(x_0)$ tend vers $2u(x_0)$ quand x tend vers x_0. D'autre part, $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ quand x tend vers x_0 et finalement $\dfrac{(u(x))^2 - (u(x_0))^2}{x - x_0}$ tend vers $2u(x_0)u'(x_0)$.
Par suite, la fonction $f\ :\ x \mapsto u^2(x)$ est dérivable en x_0 et sa dérivée en x_0 est $f'(x_0) = 2u(x_0)u'(x_0)$. En résumé, la fonction f est dérivable sur I et pour tout x de I, $f'(x) = 2u(x)u'(x)$. Le résultat est donc démontré quand $n = 2$ (et est immédiat quand $n = 1$ car dans ce cas, $nu^{n-1}u' = u'$).

Pour démontrer le résultat pour $n = 3$ ou $n = 4$ ..., il nous manque une identité remarquable, identité qui n'est plus au programme du lycée. Ce manque nous empêche de faire une démonstration directe. Néanmoins, on peut démontrer le résultat par récurrence.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

• Le résultat est démontré pour $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que la fonction u^n soit dérivable sur I et que $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ et montrons que la fonction u^{n+1} est dérivable sur I et que $(u^{n+1})' = (n+1)u^n u'$.
Puisque $u^{n+1} = u^n \times u$, la fonction u^{n+1} est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I.
De plus,

$$\begin{aligned}
(u^{n+1})' &= (u^n \times u)' = (u^n)' \times u + u^n \times u' \\
&= nu^{n-1}u' \times u + u^n \times u' \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= nu^n u' + u^n u' = (n+1)u^n u'.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

Supposons de plus que la fonction u ne s'annule pas sur I. Soit n un entier naturel strictement négatif.
Posons $m = -n$. m est un entier strictement positif. Soient x_0 et x deux réels éléments de I et distincts.

$$\begin{aligned}
\frac{(u(x))^n - (u(x_0))^n}{x - x_0} &= \frac{(u(x))^{-m} - (u(x_0))^{-m}}{x - x_0} = \frac{\dfrac{1}{(u(x))^m} - \dfrac{1}{(u(x_0))^m}}{x - x_0} \\
&= -\frac{1}{(u(x))^m (u(x_0))^m} \times \frac{(u(x))^m - (u(x_0))^m}{x - x_0}
\end{aligned}$$

La fonction u est dérivable en x_0 et en particulier la fonction u est continue en x_0. Donc $(u(x))^m(u(x_0))^m$ tend vers

$$(u(x_0))^m(u(x_0))^m = (u(x_0))^{2m} = (u(x_0))^{-2n}$$

quand x tend vers x_0. D'autre part, puisque m est strictement positif, $\dfrac{(u(x))^m - (u(x_0))^m}{x - x_0}$ tend vers $(u^m)'(x_0)$

c'est-à-dire

$$m(u(x_0))^{m-1}u'(x_0) = -n(u(x_0))^{-n-1}u'(x_0).$$

Puisque $u(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\dfrac{(u(x))^n - (u(x_0))^n}{x - x_0}$ tend vers

$$-\frac{1}{(u(x_0))^{-2n}} \times -n(u(x_0))^{-n-1}u'(x_0) = n(u(x_0))^{2n}(u(x_0))^{-n-1}u'(x_0) = n(u(x_0))^{2n-n-1}u'(x_0)$$
$$= n(u(x_0))^{n-1}u'(x_0).$$

Le résultat est maintenant démontré pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. En particulier, pour $n = -1$, la formule s'écrit

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = (-1)u^{-1-1}u' = -u^{-2}u' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Remarque. Pour calculer la dérivée de $\dfrac{1}{u^3}$, le théorème 5 nous dit de pratiquer ainsi :

$$\left(\frac{1}{u^3}\right)' = \left(u^{-3}\right)' = -3u^{-3-1}u' = -3u^{-4}u' = -\frac{3u'}{u^4}.$$

Faisons ce travail une bonne fois pour toutes, quite à rajouter une formule à un formulaire de dérivées. Soit n un entier naturel non nul.

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = (u^{-n})' = -nu^{-n-1}u' = -nu^{-(n+1)}u' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}.$$

On a établi la nouvelle formule de dérivation :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}.$$

Avec cette formule, le calcul de la dérivée de $\dfrac{1}{u^3}$ est direct :

$$\left(\frac{1}{u^3}\right)' = -\frac{3u'}{u^4}.$$

Exercice 3. Donner les dérivées des fonctions suivantes :

1) Pour tout réel x, $f_1(x) = (x^2 + 3x + 5)^3$.
2) Pour tout réel x, $f_2(x) = (3x - 1)^5$.
3) Pour tout réel x différent de $-\dfrac{1}{2}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$
4) Pour tout réel x, $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Solution. **1)** La fonction f_1 est de la forme u^3 avec pour tout x réel $u(x) = x^2 + 3x + 5$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \left(u^3\right)'(x) = 3u^2(x)u'(x) = 3(x^2 + 3x + 5)^2(2x + 3).$$

La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_1'(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 5)^2$.

2) La fonction f_2 est de la forme u^5 avec pour tout x réel $u(x) = 3x - 1$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_2'(x) = \left(u^5\right)'(x) = 5u^4(x)u'(x) = 5(3x - 1)^4 \times 3 = 15(3x - 1)^4.$$

La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 15(3x - 1)^4$.

3) La fonction f_3 est de la forme $\dfrac{1}{u^2}$ avec pour tout x réel $u(x) = 2x + 1$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ ou sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Donc la fonction f_3 est dérivable sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ ou sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
De plus, pour tout réel x différent de $-\dfrac{1}{2}$,

$$f_3'(x) = \left(\frac{1}{u^2}\right)'(x) = -\frac{2u'(x)}{u^3(x)} = -\frac{2 \times 2}{(2x+1)^3} = -\frac{4}{(2x+1)^3}.$$

La fonction f_3 est dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ ou sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et pour tout réel x différent de $-\frac{1}{2}$, $f_3'(x) = -\frac{4}{(2x+1)^3}$.

4) La fonction f_4 est de la forme $\frac{1}{u}$ avec pour tout x réel $u(x) = x^2 + 1$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$). Donc la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_4'(x) = \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_4'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

---

d) Cas général : dérivée de la fonction $x \mapsto f(u(x))$

La fonction $x \mapsto f(u(x))$ se note $f \circ u$. $f \circ u$ est la **composée de** u **suivie de** f. On note que, bien que f soit écrite à gauche de u dans la notation $f \circ u$, on commence par calculer $u(x)$ puis on calcule l'image par f de $u(x)$ et donc $f \circ u$ est bien u suivie de f.

Les formules données dans les théorèmes 3, 4 et 5 sont à chaque fois des cas particuliers de la formule générale suivante :

Théorème 6. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à un intervalle J.
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle J. Soit g la fonction définie sur I par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ g(x) = f \circ u(x) = f(u(x)).$$

La fonction g est dérivable sur I et

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ g'(x) = (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Le résultat précédent s'écrit en abrégé

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u).$$

Il est difficile en terminale (et d'ailleurs hors programme) de démontrer cette formule dans le cas général. On peut néanmoins la démontrer simplement dans un cas particulier : on suppose de plus que la fonction u est strictement monotone sur l'intervalle I (ce qui est tout de même assez fréquent).

Soient x_0 et x deux réels éléments de I et distincts. Soient $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$. y_0 et y sont deux éléments de J. Puisque la fonction u est strictement monotone sur I et que $x \neq x_0$, on a $y \neq y_0$. On peut alors écrire

$$\frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

La fonction u est dérivable en x_0 et en particulier est continue en x_0. Par suite, quand x tend vers x_0, $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ ou encore y tend vers y_0.

Puisque f est dérivable sur J, f est en particulier dérivable en y_0 et donc le rapport $\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$ tend vers $f'(y_0)$ quand y tend vers y_0 ou encore le rapport $\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$ tend vers $f'(u(x_0))$ quand x tend vers x_0.

D'autre part, la fonction u est dérivable en x_0. Donc le rapport $\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ quand x tend vers x_0. Finalement, le rapport $\frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0}$ tend vers $f'(u(x_0)) \times u'(x_0)$.

On a démontré que la fonction g est dérivable en x_0 et que $g'(x_0) = f'(u(x_0)) \times u'(x_0)$.

3) Calculs de dérivées

Les formulaires ci-dessous ne sont pas définitifs. Dans les chapitres suivants, on découvrira de nouvelles fonctions : la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien et les fonctions sinus et cosinus. De nouvelles formules de dérivées se rajouteront alors.

a) Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$

b) Opérations sur les dérivées

Théorème 7. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
1) La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2) Pour tout réel k, la fonction kf est dérivable sur I et $(kf)' = kf'$.

Démonstration. 1) Soit x_0 un réel de l'intervalle I. Pour tout réel x de I distinct de x_0,

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisque f et g sont dérivables en x_0, l'expression précédente tend vers le réel $f'(x_0) + g'(x_0)$. Par suite, la fonction $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2) Soit x_0 un réel de l'intervalle I. Pour tout réel x de I distinct de x_0,

$$\frac{(kf)(x) - (kf)(x_0)}{x - x_0} = \frac{k(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = k\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisque f est dérivable en x_0, l'expression précédente tend vers le réel $kf'(x_0)$. Par suite, la fonction kf est dérivable en x_0 et $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$.

Théorème 8. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
1) La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
2) Si de plus g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. 1) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Soit x_0 un réel de l'intervalle I. Pour tout réel x de I distinct de x_0,

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Puisque g est dérivable en x_0, g est en particulier continue en x_0 et donc $g(x)$ tend vers $g(x_0)$ quand x tend vers x_0. Puisque f et g sont dérivables en x_0, l'expression précédente tend vers le réel $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. Par suite, la fonction fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose de plus que la fonction g ne s'annule pas sur I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I. Pour tout réel x de I distinct de x_0,

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{\dfrac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right).\end{aligned}$$

Puisque g est dérivable en x_0, g est en particulier continue en x_0 et donc $g(x)$ tend vers $g(x_0)$ quand x tend vers x_0. Puisque $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{g(x)g(x_0)}$ tend vers $\dfrac{1}{(g(x_0))^2}$ quand x tend vers x_0.

Mais alors, l'expression précédente tend vers $\dfrac{1}{(g(x_0))^2}(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))$. Par suite, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Remarque. Si on applique la formule du théorème 8 à la fonction $\dfrac{1}{f}$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{0 \times f - 1 \times f'}{f^2} = -\frac{f'}{f^2},$$

et on retrouve une formule du théorème 5.

Théorème 9. **1)** Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Démonstration. **1)** Une fonction polynôme est une somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômes et en particulier un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Un tel quotient est dérivable sur tout intervalle sur lequel le dénominateur ne s'annule pas ou encore sur tout intervalle sur lequel la fonction rationnelle est définie.

Sinon, en cumulant les différents résultats de ce chapitre, on obtient le formulaire suivant :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$nu^{n-1}u'$	sur tout intervalle sur lequel u est dérivable
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	sur tout intervalle sur lequel u est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{1}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$	sur tout intervalle sur lequel u est dérivable et ne s'annule pas
u^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu^{n-1}u'$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	sur tout intervalle sur lequel u est dérivable et est strictement positive
$f \circ u$	$f' \circ u \times u'$	

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en admettant qu'elles soient dérivables sur l'intervalle I donné.

1) $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $I =]0, +\infty[$,

2) $f_2(x) = \dfrac{2x+3}{(3x-1)^2}$, $I = \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$,

2) $f_3(x) = (x^2+x+1)^4\sqrt{2x+3}$, $I = \left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

Solution. **1)** Pour $x > 0$, posons $u_1(x) = x^2 + 1$ puis $g_1(x) = \sqrt{u_1(x)}$. Alors, pour tout $x > 0$,

$$g_1'(x) = \frac{u_1'(x)}{2\sqrt{u_1(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ensuite, pour tout réel $x > 0$, $f_1(x) = \dfrac{g_1(x)}{x}$ et donc

$$f_1'(x) = \frac{g_1'(x) \times x - g_1(x) \times 1}{x^2} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

2) Pour $x > 1$, posons $u_2(x) = 3x - 1$ puis $g_2(x) = (u_2(x))^2$. Pour tout réel $x > \frac{1}{3}$,

$$g_2'(x) = 2u_2(x)u_2'(x) = 2 \times (3x-1) \times 3 = 6(3x-1),$$

Ensuite, pour tout réel $x > 1$, $f_2(x) = \dfrac{2x+3}{g_2(x)}$ et donc

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{2 \times g_2(x) - (2x+3) \times g_2'(x)}{(g_2(x))^2} = \frac{2(3x-1)^2 - (2x+3) \times 6(3x-1)}{(3x-1)^4} \\ &= \frac{(3x-1)[2(3x-1) - 6(2x+3)]}{(3x-1)^4} = \frac{6x - 2 - 12x - 18}{(3x-1)^3} = \frac{-6x-20}{(3x-1)^3}. \end{aligned}$$

3) Pour $x > -\frac{3}{2}$, posons $u_3(x) = x^2 + x + 1$ puis $g_3(x) = (u_3(x))^4$. Pour tout réel $x > -\frac{3}{2}$,

$$g_3'(x) = 4u_3^3(x)u_3'(x) = 4(x^2+x+1)^3(2x+1).$$

Pour $x > -\frac{3}{2}$, posons $v_3(x) = 2x + 3$ puis $h_3(x) = \sqrt{v_3(x)}$. Pour tout réel $x > -\frac{3}{2}$,

$$h_3'(x) = \frac{v_3'(x)}{2\sqrt{v_3(x)}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

Ensuite, pour $x > -\frac{3}{2}$, $f_3(x) = g_3(x) \times h_3(x)$ et donc

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= g_3'(x) \times h_3(x) + g_3(x) \times h_3'(x) = 4(2x+1)(x^2+x+1)^3\sqrt{2x+3} + (x^2+x+1)^4\frac{1}{\sqrt{2x+3}} \\ &= (x^2+x+1)^3\left(4(2x+1)\sqrt{2x+3} + \frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x+3}}\right) \\ &= (x^2+x+1)^3\frac{4(2x+1)\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + x^2+x+1}{\sqrt{2x+3}} = (x^2+x+1)^3\frac{4(2x+1)(2x+3) + x^2+x+1}{\sqrt{2x+3}} \\ &= (x^2+x+1)^3\frac{4(4x^2+2x+6x+3) + x^2+x+1}{\sqrt{2x+3}} = (x^2+x+1)^3\frac{4(4x^2+8x+3) + x^2+x+1}{\sqrt{2x+3}} \\ &= (x^2+x+1)^3\frac{16x^2+32x+12+x^2+x+1}{\sqrt{2x+3}} = \frac{\left(17x^2+33x+13\right)\left(x^2+x+1\right)^3}{\sqrt{2x+3}}. \end{aligned}$$

---

4) Application des dérivées à l'étude des variations d'une fonction

Théorème 10. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Démonstration. Supposons que f soit une fonction croissante sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Soit x un réel de I distinct de x_0.

Si $x < x_0$, alors $x - x_0 < 0$ et $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ (car f est croissante sur I) et si $x > x_0$, alors $x - x_0 > 0$ et $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$ (car f est croissante sur I). Dans les deux cas, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel x de I distinct de x_0, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Quand x tend vers x_0, on obtient

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

On a montré que si f est croissante sur I, alors pour tout réel x_0 de I, on a $f'(x_0) \geqslant 0$.

De même, si f est décroissante sur I, pour tout réel x_0 de I et tout réel x de I tel que $x \neq x_0$, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ puis pour tout réel x_0 de I, $f'(x_0) \leqslant 0$.

Enfin, si f est constante sur I, f est à la fois croissante et décroissante sur I et donc sa dérivée est à la fois positive et négative sur I. Finalement, la dérivée de f est nulle sur I

On admettra le théorème suivant qui dit que chaque réciproque de chacune des implications du théorème 10 est vraie.

Théorème 11. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Dans le chapitre précédent (chapitre 6 : continuité), nous avons rencontré des situations où il était essentiel de savoir qu'une fonction était **strictement** croissante ou **strictement** décroissante. Il faut donc améliorer le théorème précédent.

Théorème 12. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Le théorème 11 est de portée limitée. En effet, il existe de nombreuses fonctions dont la dérivée s'annule et qui pourtant sont strictement croissantes ou strictement décroissantes. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^2$. La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En effet, soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$. Alors

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > 0$$

ou encore $a^2 < b^2$. Mais malheureusement, la dérivée de f (définie par : pour tout réel x, $f'(x) = 2x$) s'annule en 0. Ainsi, $f'(0) = 0$ et pourtant f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Le théorème suivant étudie une situation plus générale que la situation du théorème 12.

Théorème 13. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$, sauf peut-être en un nombre **fini** de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$, sauf peut-être en un nombre **fini** de points où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ et d'autre part, $f'(0) = 0$. Ainsi la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en un point où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En conséquence,

$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b, \text{ si } a < b \text{ alors } a^3 < b^3.$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 13.$$

Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout réel x,

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 24 = 6(x^2 - 4x + 4) = 6(x-2)^2.$$

Pour tout réel x différent de 2, on a $f'(x) > 0$ et d'autre part, $f'(2) = 0$. Ainsi, la dérivée de f est strictement positive sauf en un point où elle s'annule. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème précédent, pourtant déjà de portée assez générale, ne permet pas de montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, qui est pourtant une fonction simple, est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Il permet uniquement de montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
Le théorème suivant règle le problème.

Théorème 14. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, b]$.
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$ et si pour tout réel x de $]a, b]$, $f'(x) > 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $[1, 3]$ par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [1,3],\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}.$$

1) Vérifier que f est bien définie sur $[1, 3]$.

2) Etudier la dérivabilité de f sur $]1, 3[$ et préciser f'.
3) Etudier les variations de f sur $[1, 3]$.
4) Montrer que la graphe de f est un demi cercle.

Solution. **1)** Le discriminant du trinôme $-x^2+4x-3$ est $\Delta = 4^2 - 4\times(-1)\times(-3) = 4$. Le trinôme $-x^2+4x-3$ admet donc deux racines : les réels $x_1 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-1)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-1)} = 3$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet alors d'affirmer que $-x^2+4x-3$ est du signe contraire du coefficient de x^2, à savoir -1, sur l'intervalle $[1,3]$.

Donc pour tout réel x de $[1,3]$, $-x^2+4x-3 \geqslant 0$. On en déduit que la fonction f est bien définie sur $[1,3]$.

2) Pour tout réel x de $[1,3]$, posons $u(x) = -x^2+4x-3$. Alors, pour tout réel x de $[1,3]$, $f(x) = \sqrt{u(x)}$.
D'après la question 1), on sait que pour tout réel x de $]1,3[$, $u(x) > 0$ et d'autre part la fonction u est dérivable sur $]1,3[$ en tant que fonction polynôme. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]1,3[$ et que pour tout réel x de $]1,3[$,

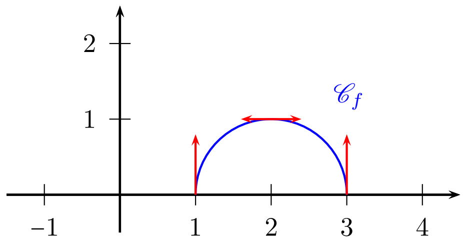
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}.$$

3) Puisque la fonction u est positive sur $[1,3]$, on sait que la fonction f est continue sur $[1,3]$.
D'après la question 2), f est dérivable sur $]1,3[$ et pour tout réel x de $]1,3[$, $f'(x) = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$. Pour tout réel x de $]1,3[$, on a $\sqrt{-x^2+4x-3} > 0$ et donc pour tout réel x de $]1,3[$, $f'(x)$ est du signe de $-x+2$.
Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $]1,2[$, s'annule en 2 et est strictement négative sur $]2,3[$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[1,2]$ et strictement décroissante sur $[2,3]$.

4) On note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}_f &\Leftrightarrow y = \sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow y^2 = -x^2+4x-3 \text{ et } y \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 1^2. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}_f$ est donc la partie du cercle de centre $\Omega(2,0)$ et de rayon 1 constituée des points d'ordonnées positives.



5) Application des dérivées à la recherche des extrema d'une fonction

Les dérivées peuvent permettre de déterminer les variations d'une fonction et les variations d'une fonction peuvent permettre de déterminer les extrema de cette fonction. On ne donnera ici aucun théorème sur le sujet. On se contentera d'un exercice à titre d'exemple.

Exercice 7. Montrer que pour tout réel x de $[-2,4]$, $-10 \leqslant -x^3+3x^2+9x-5 \leqslant 22$.

Solution. Pour tout réel x de $[-2,4]$, posons $f(x) = -x^3+3x^2+9x-5$. f est dérivable sur $[-2,4]$ et pour tout réel x de $[-2,4]$,

$$f'(x) = -3x^2+6x+9 = -3(x^2-2x-3).$$

Le discriminant du trinôme x^2-2x-3 est $\Delta = (-2)^2-4\times1\times(-3) = 16 > 0$. Ce trinôme admet deux racines distinctes à savoir $x_1 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2} = 3$. Mais alors le trinôme $-3x^2+6x+9$ admet -1 et 3 pour racines. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré permet de dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-7	↘	-10	↗	22	↘	15

L'étude des variations de la fonction f montrent que f admet un minimum sur $[-2,4]$ et que ce minimum est égal à $f(-1)$ ou encore à -10. De même, f admet un maximum sur $[-2,4]$ et ce maximum est égal à $f(3)$ ou encore à 22. En particulier,

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [-2,4],\ -10 \leqslant -x^3+3x^2+9x-5 \leqslant 22.$$

---

6) Utilisation des dérivées pour lever des indéterminations du type $\dfrac{0}{0}$

A titre d'exemple, déterminons la limite quand x tend vers 2 de $\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$. Nous avons déjà déterminé cette limite dans l'exercice 7 du chapitre 5 grâce à l'utilisation d'une quantité conjuguée. Nous allons de nouveau calculer cette limite en l'interprétant comme un nombre dérivé.

Quand x tend vers 2, $\sqrt{2x+5}-3$ tend vers $\sqrt{2\times 3+5}-3=0$ et $x-2$ tend vers 0. Nous sommes donc en présence d'une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$. Ceci doit éveiller les soupçons car quand on calcule un nombre dérivé c'est-à-dire la limite quand x tend vers x_0 de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, on est aussi en présence d'une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$.

Pour tout réel $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$, posons $f(x)=\sqrt{2x+5}$. Alors, pour tout réel x de $\left[-\dfrac{5}{2},+\infty\right[$ tel que $x \neq 2$,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}.$$

La limite à calculer est donc la limite en un réel d'un taux d'accroissement c'est-à-dire un nombre dérivé.

On sait que la fonction f est dérivable sur $\left]-\dfrac{5}{2},+\infty\right[$ car pour tout $x>-\dfrac{5}{2}$, on a $2x+5>0$ et que pour tout réel $x>-\dfrac{5}{2}$,

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}.$$

En particulier, f est dérivable en 2 et

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{\sqrt{2\times 2+5}}=\frac{1}{3}.$$

On retrouve ainsi par une autre méthode le résultat de l'exercice 7 du chapitre 5.