Chapitre 5. Limites de fonctions

I. Limites

Le cours sur les limites de fonctions est plus volumineux que le cours sur les limites de suites car pour une suite, on envisage uniquement le cas où l'entier n tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Pour les fonctions, la variable x peut tendre vers $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$) ou vers $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$) ou vers un réel ($\lim\limits_{x\to1} f(x)$) et aller vers ce réel par la droite ($\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$) ou par la gauche ($\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$). Les situations à étudier sont donc nettement plus nombreuses.

1) Limite infinie en l'infini

a) Exemples

Exemple 1. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : pour tout réel positif x, $f(x)=\sqrt{x}$. On s'intéresse aux valeurs prises par la fonction f pour les grandes valeurs de x. Voici un tableau de valeurs

x	0	4	10	100	1000	10000	100000	1000000	10^{20}
$\sqrt{x}$	0	2	$3,1\ldots$	10	$31,6\ldots$	100	$316,2\ldots$	1000	10^{10}

On va donner un sens plus précis à la phrase : « $\sqrt{x}$ est grand quand x est grand ».
Peut-on avoir $\sqrt{x}>10$? Oui, dès que $x>100$, alors $\sqrt{x}>10$.
Peut-on avoir $\sqrt{x}>100$? Oui, dès que $x>10000$, alors $\sqrt{x}>100$.
Plus généralement, si A est un réel positif donné, peut-on avoir $\sqrt{x}>A$? Oui, dès que $x>A^2$, alors $\sqrt{x}>A$, et si A est un réel négatif, c'est encore mieux car dès que $x>0$, alors $\sqrt{x}>A$.

Ainsi, tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient $\sqrt{x}$ pourvu que l'on prenne x assez grand. On traduit ce fait en disant que la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x}$ est $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Exemple 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x)=x^2$. On s'intéresse aux valeurs prises par la fonction f pour les grandes valeurs négatives de x. Voici un tableau de valeurs

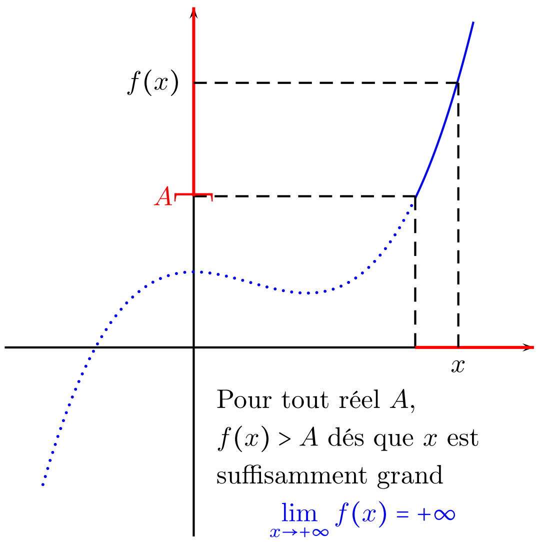
x	0	-1	-2	-3	-10	-20	-50	-100	-1000
x^2	0	1	4	9	100	400	2500	10000	1000000

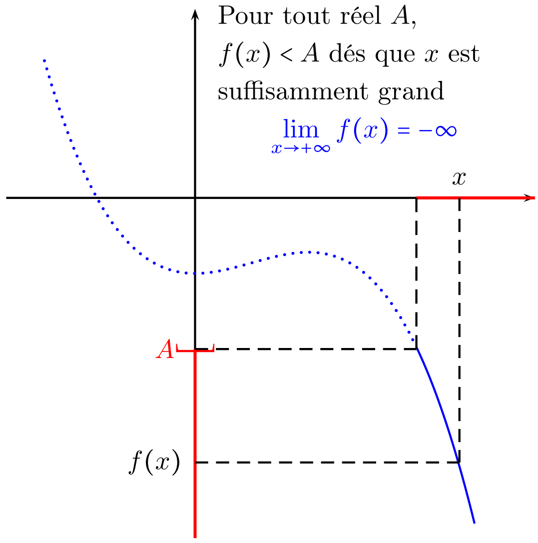
On va donner un sens plus précis à la phrase : « x^2 est grand quand x est négatif et grand en valeur absolue ».
Peut-on avoir $x^2>10$ pour un réel négatif ? Oui, dès que $x<-4$, alors $x^2>10$.
Peut-on avoir $x^2>100$ pour un réel négatif ? Oui, dès que $x<-10$, alors $x^2>100$.
Plus généralement, si A est un réel positif donné, peut-on avoir $x^2>A$ pour un réel négatif ? Oui, dès que $x<-\sqrt{A}$, alors $x^2>A$, et si A est un réel strictement négatif, c'est encore mieux car pour tout réel x, on a $x^2>A$.

Ainsi, tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient x^2 pourvu que l'on prenne x négatif assez grand en valeur absolue. On traduit ce fait en disant que la limite quand x tend vers $-\infty$ de x^2 est $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

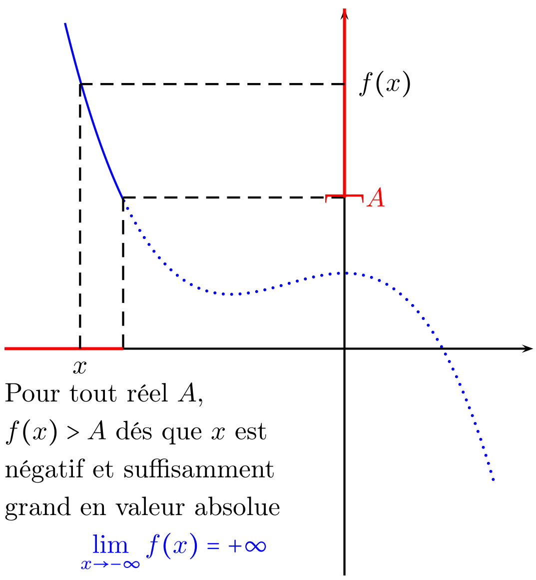
b) Définitions

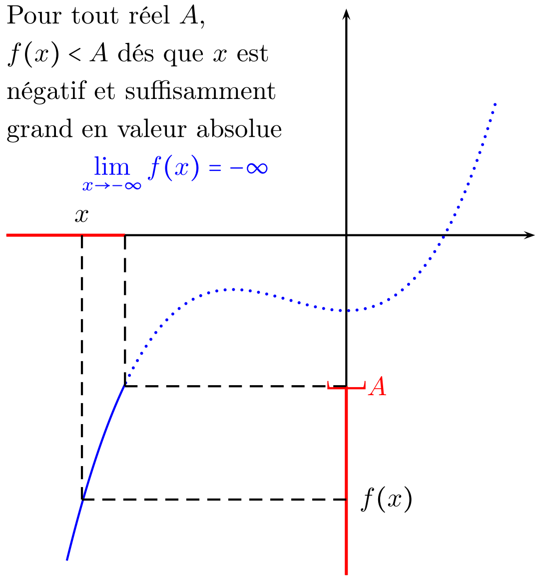
Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha,+\infty[$ ou $[\alpha,+\infty[$.
1) On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient $f(x)$ pour x positif assez grand. On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
2) On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty,A[$ contient $f(x)$ pour x positif assez grand.
On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.





Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha]$.
1) On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue. On écrit alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2) On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue.
On écrit alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

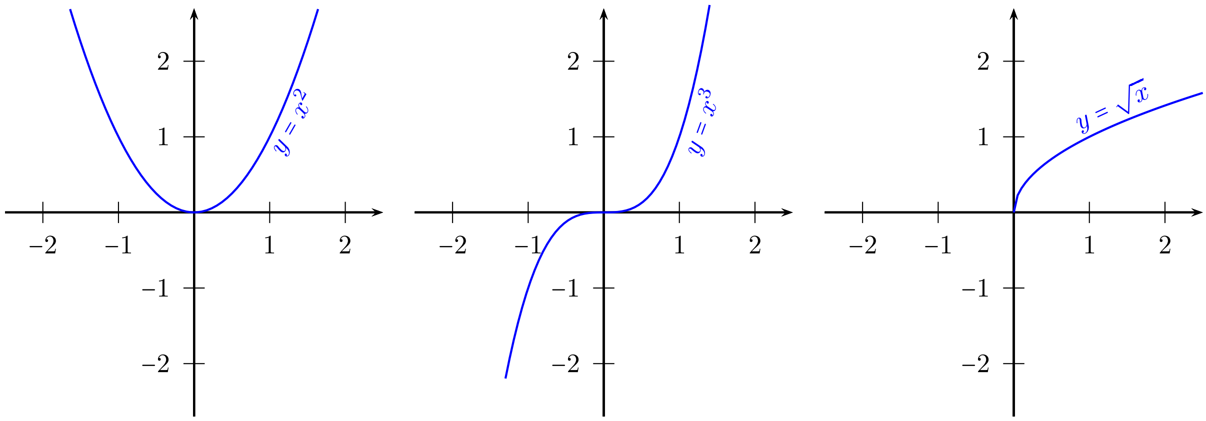




c) Limites de référence infinies en l'infini

Théorème 1. **1) a)** Pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
b) Pour tout entier naturel non nul p, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2p} = +\infty$ et pour tout entier naturel p, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2p+1} = -\infty$ ou encore, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Voici les graphes des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.



Démonstration. Nous allons démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

• Soit A un réel. Si $A < 0$, alors pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} > A$.
Si $A \geqslant 0$, alors pour $x > A^2$, on a $\sqrt{x} > \sqrt{A^2}$ (par stricte croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, +\infty[$) ou encore $\sqrt{x} > A$.
Ainsi, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient $\sqrt{x}$ pourvu que x soit suffisamment grand et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

• Soit A un réel. Si $A < 0$, alors pour tout réel x, $x^2 > A$.
Si $A \geqslant 0$, alors pour tout réel $x < -\sqrt{A}$, on a $x^2 > \left(-\sqrt{A}\right)^2$ (par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $]-\infty, 0]$) ou encore $x^2 > A$.
Ainsi, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient x^2 pourvu que x soit négatif et suffisamment grand en valeur absolue. Donc

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$$

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = 1 - (x-2)^2.$$

Montrer en revenant à la définition que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Solution. Soit A un réel. Soit x un réel.

$$f(x) < A \Leftrightarrow 1 - (x-2)^2 < A \Leftrightarrow 1 - A < (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 1 - A.$$

1er cas. Si $A > 1$, alors $1 - A < 0$ et donc pour tout réel x, $(x-1)^2 > 1 - A$ puis $f(x) < A$.

2 ème cas. Si $A \leqslant 1$, alors $1 - A \geqslant 0$. Par suite,

$$(x-1)^2 > 1 - A \Leftrightarrow x - 1 > \sqrt{1-A} \text{ ou } x - 1 < -\sqrt{1-A} \Leftrightarrow x > 1 + \sqrt{1-A} \text{ ou } x < 1 - \sqrt{1-A}.$$

En particulier, si $x < 1 - \sqrt{1-A}$, alors $(x-1)^2 > 1 - A$ puis $f(x) < A$.

Ainsi, tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient $f(x)$ pourvu que x soit négatif et suffisamment grand en valeur absolue. Donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

---

2) Limite réelle en l'infini

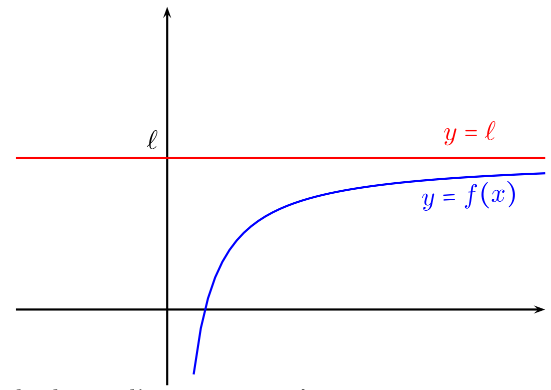
a) Définition

Définition 3. 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.
On dit que f tend vers le réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de centre ℓ contient $f(x)$ pour x assez grand. On écrit alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha]$.
On dit que f tend vers le réel ℓ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de centre ℓ contient $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue.
On écrit alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

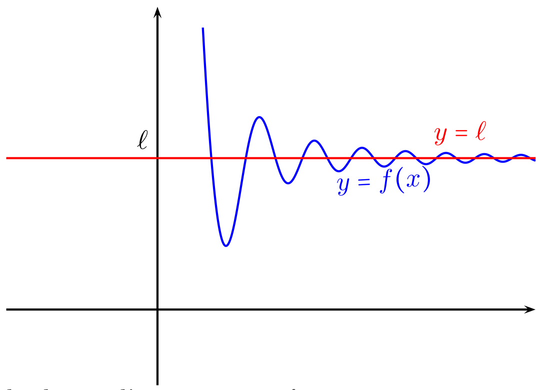
Il revient au même de dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) et de dire que la distance de $f(x)$ à ℓ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

b) Droite asymptote parallèle à l'axe des abscisses

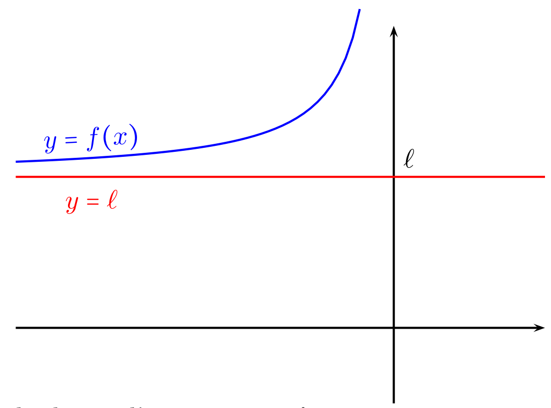
Définition 4. Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ et ℓ un réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $-\infty$.



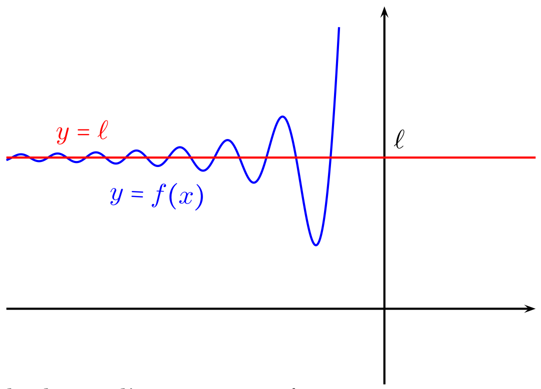
la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$



la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$



la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$



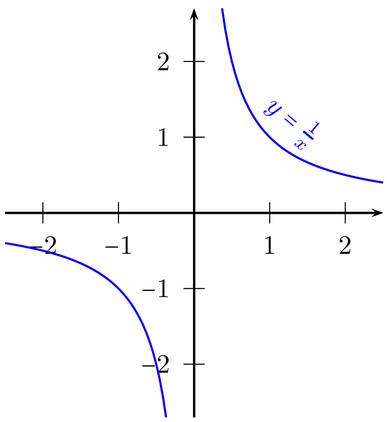
la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$

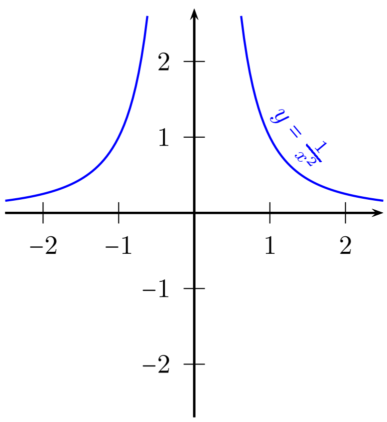
c) Limites de référence réelles en l'infini

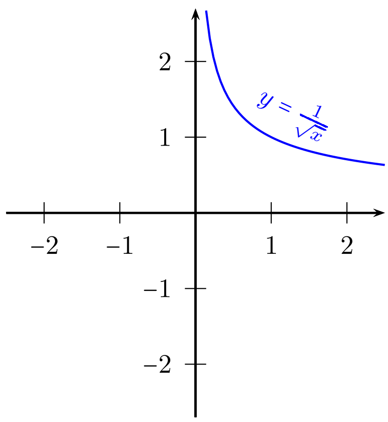
On admettra le théorème suivant :

Théorème 2. **1)** Pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Voici les graphes des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.







3) Limite infinie en un réel

a) Définition

Exemple. Considérons la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Voici un tableau de valeurs :

x	0	1	1.5	1.8	1.9	1.99	2.01	2.1	2.5
$\dfrac{1}{(x-2)^2}$	0.25	1	4	25	100	10000	10000	100	4

On va donner un sens plus précis à la phrase : « $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ est grand quand x est proche de 2 ».

Peut-on avoir $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 100$? Oui, dès que $2-0,1 < x < 2+0,1$ et $x \neq 2$, alors $-0,1 < x-2 < 0,1$ et $x \neq 2$ puis $0 < (x-2)^2 < \dfrac{1}{100}$ et donc $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 100$.

Peut-on avoir $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 10000$? Oui, dès que $2-0,01 < x < 2+0,01$ et $x \neq 2$, alors $-0,01 < x-2 < 0,01$ et $x \neq 2$ puis $0 < (x-2)^2 < \dfrac{1}{10000}$ et donc $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 10000$.

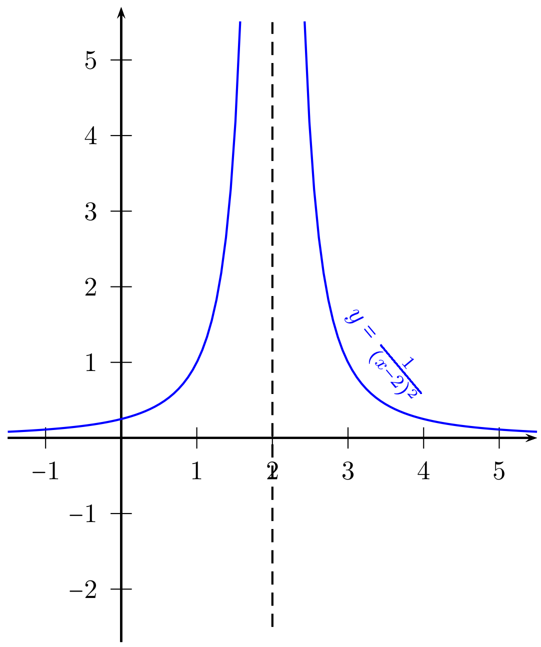
Plus généralement, si A est un réel strictement positif donné, peut-on avoir $\dfrac{1}{(x-2)^2} > A$?

Oui, dès que $2-\dfrac{1}{\sqrt{A}} < x < 2+\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ et $x \neq 2$, alors $-\dfrac{1}{\sqrt{A}} < x-2 < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ et $x \neq 2$ puis $0 < (x-2)^2 < \dfrac{1}{A}$ et donc $\dfrac{1}{(x-2)^2} > A$.

Si A est un réel négatif ou nul, c'est encore mieux car pour tout réel $x \neq 2$, alors $\dfrac{1}{(x-2)^2} > A$.

Ainsi, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ pourvu que l'on prenne x suffisamment proche de 2. On traduit ce fait en disant que la limite de $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ est $+\infty$ quand x tend vers 2 et on écrit $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Le graphe de f est



Définition 5. Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a-b, a[\cup]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$.

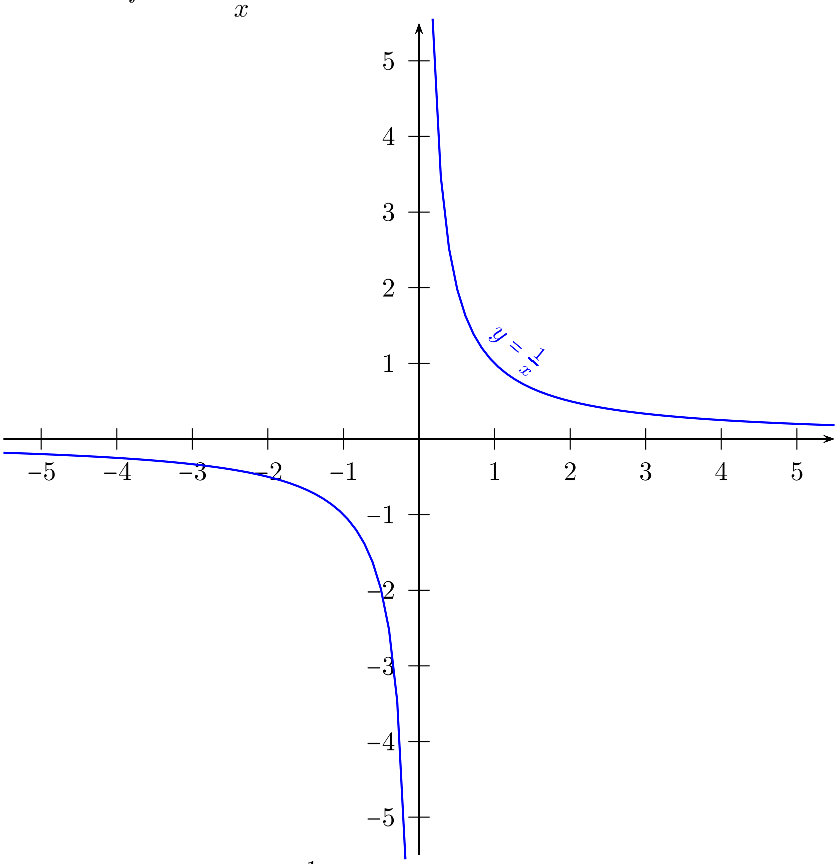
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a.

On écrit alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

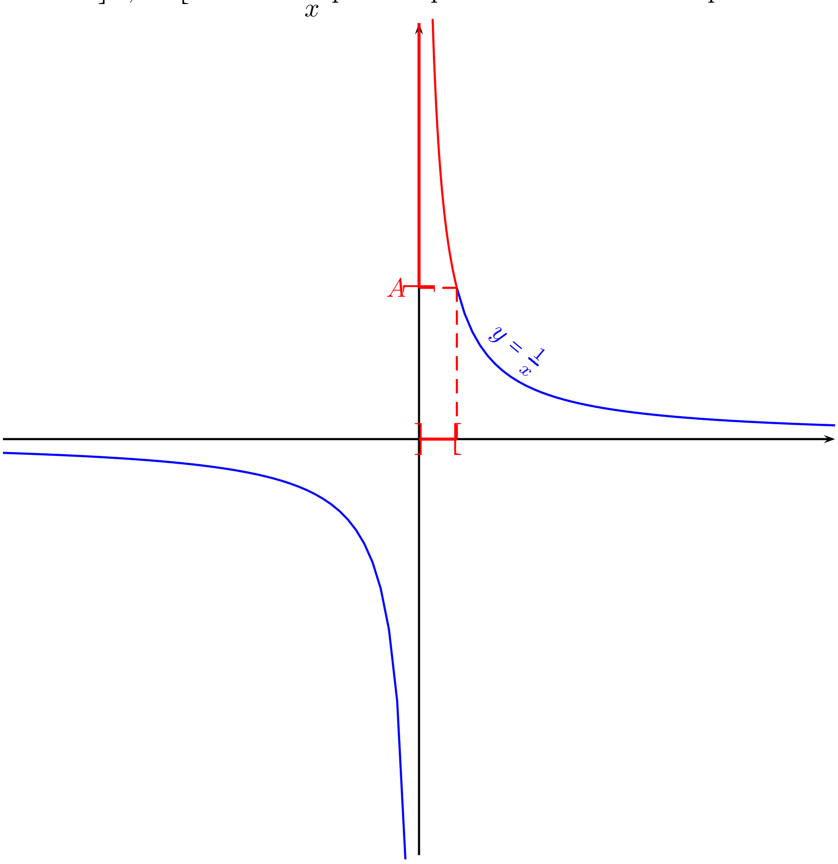
Définition 6. Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b,a[$, $b\in]0,+\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a,a+b[$, $b\in]0,+\infty[$, ou même contenant $]a-b,a[\cup]a,a+b[$, $b\in]0,+\infty[$.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty,A[$, $A\in\mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a.
On écrit alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

b) Limite à droite, limite à gauche

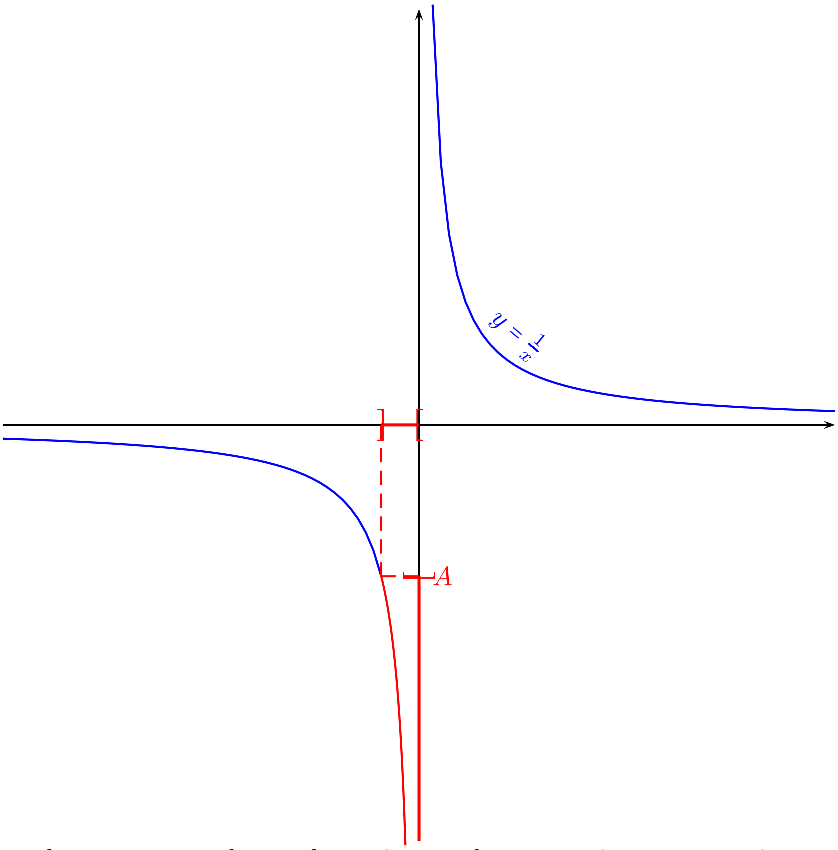
Voici le graphe de la fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{1}{x}$.



Tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient $\dfrac{1}{x}$ pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et strictement positif



et tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient $\dfrac{1}{x}$ pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et strictement négatif



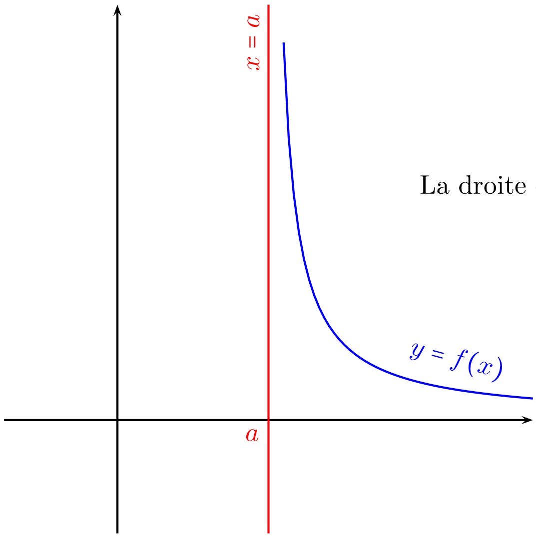
On dit alors que $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ou aussi quand x tend vers 0 à droite et que $\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures ou aussi quand x tend vers 0 à gauche et on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

Définition 7. Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$ (respectivement un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$).
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite (respectivement à gauche) si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D, suffisamment proche de a et supérieur à a (respectivement inférieur à a).
On écrit alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ (respectivement $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$).

Définition 8. Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$ (respectivement un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$).
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a à droite (respectivement à gauche) si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D, suffisamment proche de a et supérieur à a (respectivement inférieur à a).
On écrit alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ (respectivement $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$).

c) Droite asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition 9. Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a-b, a[\cup]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$.
Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ou $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote** à la courbe représentative de f.



La droite d'équation $x = a$ est **asymptote** à $\mathscr{C}_f$.

d) Limites de référence infinies en un réel

On admettra le théorème suivant :

Théorème 3. **1) a)** Pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

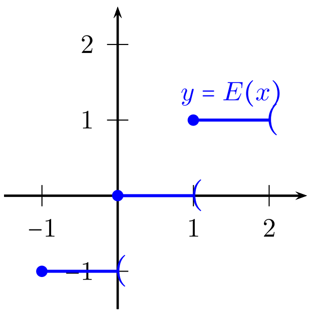
2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

4) Limite réelle en un réel

Définition 10. Soient a et ℓ deux réels. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a - b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a + b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a - b, a[\cup]a, a + b[$, $b \in]0, +\infty[$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a (respectivement x tend vers a par valeurs supérieures ou x tend vers a par valeurs inférieures) si tout intervalle ouvert de centre ℓ contient $f(x)$ quand x est suffisamment proche de a (respectivement x est suffisamment proche de a et $x > a$ ou x est suffisamment proche de a et $x < a$).

On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$).

Exemple. La partie entière d'un réel est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à ce réel. Si x est un réel, la partie entière de x se note $E(x)$. Ainsi, si $0 \leqslant x < 1$ alors $E(x) = 0$ et si $1 \leqslant x < 2$ alors $E(x) = 1$.
Par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} E(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} E(x) = 1$.
On note que $E(1) = 1$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} E(x) \neq E(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} E(x) = E(1)$.



On admettra le théorème suivant :

Théorème 4. **1)** Pour tout réel a et toute fonction polynôme P, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

2) Pour tout réel a et toute fonction rationnelle f définie en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3) Pour tout réel positif a, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

II. Opérations sur les limites

1) Somme de deux fonctions

On admettra le théorème suivant dont les résultats sont très intuitifs.

Théorème 5. (limite d'une somme de deux fonctions). Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Dans les situations suivantes, x tend vers un réel a ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
1) Si la fonction f tend vers un réel ℓ et si la fonction g tend vers un réel ℓ', alors la fonction $f+g$ tend vers le réel $\ell+\ell'$.
2) Si la fonction f tend vers un réel ℓ et si la la fonction g tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors la fonction $f+g$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
3) Si les fonctions f et g tendent toutes les deux vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), la suite $f+g$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
4) Si la fonction f tend vers $+\infty$ et la fonction g tend vers $-\infty$, on ne peut pas conclure car tout est possible pour la fonction $f+g$.

On résume ces différents résultats dans un tableau.

f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Le tableau ci-dessus comporte un **?**. Quand la fonction f tend vers $+\infty$ et que la fonction g tend vers $-\infty$, tout est possible et on ne peut donc pas donner de résultat général. Voici quatre exemples montrant que l'on peut vraiment obtenir n'importe quel résultat pour la fonction $f+g$. Dans chacun des quatre cas ci-dessous, la fonction f tend vers $+\infty$ et la fonction g tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

• $f(x)=x^2+x$, $g(x)=-x^2$, $f(x)+g(x)=x$. Dans ce cas, la fonction $f+g$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
• $f(x)=x^2-x$, $g(x)=-x^2$, $f(x)+g(x)=-x$. Dans ce cas, la fonction $f+g$ tend vers $-\infty$.
• $f(x)=x^2+1$, $g(x)=-x^2$, $f(x)+g(x)=1$. Dans ce cas, la fonction $f+g$ tend vers 1.
• Pour ceux qui connaissent déjà la fonction sinus, $f(x)=x^2+\sin(x)$, $g(x)=-x^2$, $f(x)+g(x)=\sin(x)$. Dans ce cas, la fonction $f+g$ n'a pas de limite.

2) Produit de deux fonctions

Théorème 6. (limite d'un produit de deux fonctions). Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Dans les situations suivantes, x tend vers un réel a ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
1) Si la fonction f tend vers un réel ℓ et si la fonction g tend vers un réel ℓ', alors la fonction $f\times g$ tend vers le réel $\ell\times\ell'$.
2) a) Si la fonction f tend vers un réel $\ell>0$ et si la fonction g tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), la fonction $f\times g$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
b) Si la fonction f tend vers le réel $\ell<0$ et si la fonction g tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), la fonction $f\times g$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
3) a) Si les fonctions f et g tendent toutes les deux vers $+\infty$ ou toutes les deux vers $-\infty$, la fonction $f\times g$ tend vers $+\infty$.
b) Si l'une des deux fonctions f ou g tend vers $+\infty$ ou l'autre tend vers $-\infty$, la fonction $f\times g$ tend vers $-\infty$.
4) Si la fonction f tend vers 0 et la fonction g tend vers $\pm\infty$, on ne peut pas conclure car tout est possible pour la fonction $f\times g$.

On résume ces différents résultats dans un tableau.

f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Remarque. Le cas particulier où l'une des deux fonctions est une fonction constante et non nulle fournit les différents résultats pour la fonction kf où k est un réel non nul.

Encore une fois, le tableau comporte un **?**. Voici quatre exemples où la fonction f tend vers 0 et la fonction g tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $+\infty$ avec à chaque fois un résultat différent concernant la fonction $f\times g$.

• $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^2$, $f(x)\times g(x)=x$. Dans ce cas, la fonction $f\times g$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, $f(x) \times g(x) = \dfrac{1}{x}$. Dans ce cas, la fonction $f \times g$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, $f(x) \times g(x) = 1$. Dans ce cas, la fonction $f \times g$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $g(x) = x$, $f(x) \times g(x) = \sin(x)$. Dans ce cas, la fonction $f \times g$ n'a pas de limite en $+\infty$.

3) Quotient de deux fonctions

Théorème 7. (limite d'un quotient de deux fonctions). Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, la fonction g ne s'annulant pas sur I. Dans les situations suivantes, x tend vers un réel a ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

1) Si la fonction f tend vers un réel ℓ et si la fonction g tend vers un réel $\ell' \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers le réel $\dfrac{\ell}{\ell'}$.

2) Si la fonction f tend vers un réel ℓ et si la fonction g tend vers $\pm\infty$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0.

3) a) Si la fonction f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et si la fonction g tend vers un réel $\ell' > 0$ (respectivement $\ell' < 0$), la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers $+\infty$.

b) Si la fonction f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et si la fonction g vers un réel $\ell' < 0$ (respectivement $\ell' > 0$), la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers $-\infty$.

4) a) Si la fonction f tend vers un réel $\ell > 0$ ou vers $+\infty$ (respectivement vers un réel $\ell < 0$ ou vers $-\infty$) et si la fonction g est strictement positive (respectivement strictement négative) et tend vers 0, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers $+\infty$.

b) Si la fonction f tend vers un réel $\ell > 0$ ou vers $+\infty$ (respectivement vers un réel $\ell < 0$ ou vers $-\infty$) et si la fonction g est strictement négative (respectivement strictement positive) et tend vers 0, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers $-\infty$.

5) Si les deux fonctions f et g tendent toutes les deux vers 0 ou toutes les deux vers $\pm\infty$, on ne peut pas conclure car tout est possible pour la fonction $\dfrac{f}{g}$.

On résume ces différents résultats dans un tableau.

f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	0 en étant > 0	0 en étant > 0	0 en étant < 0	0 en étant < 0	0
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Remarque. En particulier, l'inverse d'une fonction tendant vers l'infini est une fonction tendant vers 0 et l'inverse d'une fonction strictement positive ou strictement négative tendant vers 0 est une fonction tendant vers l'infini (+ ou −). On résume ces résultats avec les deux égalités

$$\frac{1}{0} = \infty \text{ et } \frac{1}{\infty} = 0.$$

L'écriture $\dfrac{1}{0}$ ne signifie pas que l'on a divisé le nombre 1 par le nombre 0 mais que l'on a divisé une fonction tendant vers 1 par une fonction tendant vers 0. De même, l'écriture $\dfrac{1}{\infty}$ ne signifie pas que l'on a divisé le nombre 1 par l'infini (qui n'est pas un nombre) mais que l'on a divisé une fonction tendant vers 1 par une fonction tendant vers l'infini.

Cette fois-ci, le tableau comporte deux **?**. Voici trois exemples où les deux fonctions f et g tendent vers 0 avec à chaque fois un résultat différent concernant la fonction $\dfrac{f}{g}$ quand x tend vers $+\infty$.

• $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$. Dans ce cas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
• $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$. Dans ce cas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
• $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dans ce cas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Voici trois autres exemples où les deux fonctions f et g tendent vers $+\infty$ avec à chaque fois un résultat différent concernant la fonction $\dfrac{f}{g}$.

• $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$. Dans ce cas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
• $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$. Dans ce cas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
• $f(x) = x$, $g(x) = x$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dans ce cas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2 - 7x + 5\right)$.
2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{2x-3}{x^2+x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{2x-3}{x^2+x}$.
3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$.

Solution. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x = +\infty$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5$. En effectuant la somme, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2 - 7x + 5\right) = +\infty$.

2) On note tout d'abord que $\lim\limits_{x\to0} 2x - 3 = -3$ et $\lim\limits_{x\to0} x^2 + x = 0$.
Etudions le signe de $x^2 + x$. Pour tout réel x, $x^2 + x = x(x+1)$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet alors de donner le signe de $x^2 + x$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

En particulier, pour tout réel x de $]-1, 0[$, $x^2 + x < 0$ et pour tout réel x de $]0, 1[$, $x^2 + x > 0$.

Ainsi, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, x^2+x tend vers 0 en restant strictement positif et d'autre part, $2x - 3$ tend vers -3 qui est strictement négatif. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{2x-3}{x^2+x} = -\infty$$

De même, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $x^2 + x$ tend vers 0 en restant strictement négatif et d'autre part, $2x - 3$ tend vers -3 qui est strictement négatif. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{2x-3}{x^2+x} = +\infty.$$

2) $\lim\limits_{x\to1} 3x + 1 = 4$ et $\lim\limits_{x\to1} (x-1)^2 = 0$.
Comme $4 > 0$ et que d'autre part, pour tout réel x différent de 1, $(x-1)^2 > 0$,

$$\lim_{x\to1} \frac{3x+1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

4) Limite d'une composée de deux fonctions

On admettra le théorème suivant :

Théorème 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel x de I, $f(x)$ appartienne à un intervalle J et soit g une fonction définie sur J.
Dans ce qui suit a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et a est dans I ou est une borne de I, b désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et est dans J ou une borne de J et c désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Exercice 3. Pour tout réel x, on pose $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

1) Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Solution. **1)** Pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si $x^2+x+1\geqslant 0$.

Le discriminant du trinôme x^2+x+1 est $\Delta=1^2-4\times 1=-3$. On sait que le trinôme x^2+x+1 est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et que ce signe est le signe du coefficient de x^2 à savoir 1. On en déduit que pour tout réel x, $x^2+x+1\geqslant 0$ puis que pour tout réel x, $f(x)$ existe. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Immédiatement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)=+\infty$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+1)=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)=+\infty$. Donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty.$$

---

5) Comment lever une indétermination ?

a) Les quatre formes indéterminées

Dans les théorèmes précédents, nous avons rencontré quatre situations où le résultat était imprévisible. Ces quatre situations sont les quatre **formes indéterminées** de la classe de terminale. L'une d'entre elles est à part : c'est la forme $+\infty-\infty$. Les trois autres vont ensemble car il s'agit en fait de la même forme indéterminée : ce sont les formes $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ et $0\times\infty$. Il s'agit bien d'une seule et même indétermination en tenant compte des deux « égalités » : $\dfrac{1}{0}=\infty$ et $\dfrac{1}{\infty}=0$.

Les quatre formes indéterminées.

$$+\infty-\infty \qquad\Big|\qquad \frac{\infty}{\infty}\qquad \frac{0}{0}\qquad 0\times\infty$$

b) Lever une indétermination

Quand on est en présence d'une telle forme indéterminée, les théorèmes 10, 11 et 12 affirment que l'on ne peut pas conclure avec cette écriture de la fonction. Ceci ne signifie pas que tout s'arrête et que l'on ne sait pas faire l'exercice. Cela signifie que l'on doit chercher une autre écriture de la fonction sous laquelle l'indétermination disparaît.
Enumérons un certain nombre de situations types :

Situation 1. Une somme présente une indétermination du type $+\infty-\infty$ et l'un des termes est clairement « prépondérant » devant les autres. Dans ce cas,

on met le terme prépondérant en facteur.

Par exemple, pour $x\in\mathbb{R}$, posons $f(x)=2x^2-3x+5$. $2x^2$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et $-3x+5$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Nous sommes donc face à une forme indéterminée. Il n'est pas nécessaire de le constater sur une copie. En présence d'une forme indéterminée, la première chose à ne pas faire est d'écrire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ldots$ car on ne sait même pas si cette limite existe. On transforme d'abord l'écriture de $f(x)$ en mettant le terme prépondérant $2x^2$ en facteurs sans écrire le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$: pour tout réel **non nul** x,

$$f(x)=2x^2-3x+5=2x^2\left(\frac{2x^2}{2x^2}-\frac{3x}{2x^2}+\frac{5}{2x^2}\right)=2x^2\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{5}{2x^2}\right).$$

Dans la parenthèse est apparue une somme dont le premier terme est 1. Les autres termes tendent vers 0 car ils sont le résultat de la division d'un terme par un terme prépondérant. La parenthèse tend donc vers 1 et il n'y a plus qu'à donner la limite du terme prépondérant mis en facteur. L'indétermination a été levée et on peut maintenant utiliser le symbole $\lim\limits_{x\to+\infty}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{2x^2}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{2x^2}=1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2x^2=+\infty$. En effectuant le produit des deux fonctions, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x^2}\right) = +\infty.$$

Situation 2. Un quotient présente une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ et en numérateur et en dénominateur, un des termes est clairement prépondérant devant les autres. De nouveau, on met le terme prépondérant en facteur au numérateur et au dénominateur.

> **Exercice 4.** Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
>
> $$\text{pour tout réel positif } x,\ f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{3x^2 + x + 1}.$$
>
> Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution. Pour tout réel **strictement positif** x,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{3x^2 + x + 1} = \frac{2x^2\left(\dfrac{2x^2}{2x^2} - \dfrac{5x}{2x^2} + \dfrac{7}{2x^2}\right)}{3x^2\left(\dfrac{3x^2}{3x^2} + \dfrac{x}{3x^2} + \dfrac{1}{3x^2}\right)} = \frac{2x^2}{3x^2} \times \frac{1 - \dfrac{5}{2x} + \dfrac{7}{2x^2}}{1 + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \dfrac{5}{2x} + \dfrac{7}{2x^2}}{1 + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{5}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{2x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{5}{2x} + \dfrac{7}{2x^2}\right) = 1$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}\right) = 1$.

En effectuant le quotient des deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{5}{2x} + \dfrac{7}{2x^2}}{1 + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et finalement

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3} \times \frac{1 - \dfrac{5}{2x} + \dfrac{7}{2x^2}}{1 + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Commentaire. Au numérateur, nous avons mis en facteur le terme prépondérant $2x^2$ en facteur et au dénominateur, nous avons mis en facteur le terme prépondérant $3x^2$. Nous avons ainsi fait apparaître explicitement le « face à face » entre $2x^2$ et $3x^2$ qui contient l'indétermination $\dfrac{\infty}{\infty}$. L'indétermination a été levée quand nous avons simplifié par x^2.

Situation 3. Une somme contient des racines carrées, présente une indétermination du type $+\infty - \infty$ et un des termes est clairement prépondérant devant les autres. La technique reste la même : on met le terme prépondérant en facteur.

> **Exercice 5.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> $$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} + x.$$
>
> Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Solution. Pour tout réel strictement négatif x,

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} + x = \sqrt{4x^2\left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}\right)} + x = \sqrt{4x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + x$$

$$= -2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + x \text{ (car } x < 0\text{)}$$

$$= x\left(-2\sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + 1\right).$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}\right) = 1$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} -2\sqrt{1 + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}} + 1 = -2\sqrt{1} + 1 = -1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et finalement, en effectuant le produit des deux fonctions

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-2\sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}} - 1\right) = +\infty.$$

Commentaire. Dans l'exercice précédent, nous étions en face d'une indétermination du type $+\infty - \infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, le premier terme $\sqrt{4x^2+x+1}$ vaut environ $\sqrt{4x^2} = -2x$ et donc la somme $\sqrt{4x^2+x+1}+x$ vaut environ $-2x+x = -x$. Ce discours approximatif doit être remplacé par un calcul rigoureux. La technique consiste à mettre en facteur le prépondérant $4x^2$ en facteur sous la racine carrée.

Situation 4. Une somme contient des racines carrées, présente une indétermination du type $+\infty - \infty$ mais aucun des termes n'est prépondérant devant l'autre.
La technique consiste alors souvent à utiliser une **quantité conjuguée**.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x.$$

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout entier réel strictement positif x, $\sqrt{x^2+x+1}+x \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} \text{ (car } x \neq 0) \\
&= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \text{ (car } x > 0) \\
&= \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1 = \sqrt{1}+1 = 2$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ et donc en effectuant le quotient des deux fonctions

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Commentaire. Nous étions en présence d'une indétermination du type $+\infty - \infty$. Mais si nous pratiquons comme dans l'exercice 5 :

$$\sqrt{x^2+x+1} - x = \ldots = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right),$$

nous transformons l'indétermination $+\infty - \infty$ en l'indétermination $\infty \times 0$. La différence avec l'exercice 5 est que $\sqrt{x^2} - x = 0$ (alors que dans l'exercice précédent on avait $\sqrt{4x^2} + x = -x$ pour $x < 0$).
Pour voir explicitement le « face à face » $\sqrt{x^2} - x = x - x = 0$, il faudrait pouvoir élever au carré l'expression $\sqrt{x^2+x+1}$. Pour pouvoir élever au carré $\sqrt{a}$ dans l'expression $\sqrt{a} - b$, on utilise la **quantité conjuguée** $\sqrt{a}+b$:

$$\left(\sqrt{a}-b\right)\left(\sqrt{a}+b\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - b^2 = a - b^2.$$

Ainsi, on multiplie et on divise l'expression $\sqrt{x^2+x+1} - x$ par l'expression $\sqrt{x^2+x+1} + x$. L'effet est double : au numérateur on a maintenant $(x^2+x+1) - x^2 = x+1$ et le « face à face » $x^2 - x^2 = 0$ est apparu explicitement. Au dénominateur, il n'y a plus d'indétermination du type $+\infty - \infty$. Le dénominateur $\sqrt{x^2+x+1}+x$ tend vers $+\infty + \infty = +\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On peut alors revenir à la technique du terme prépondérant en facteur.

Situation 5. Un quotient contient des racines carrées et présente une indétermination du type $\frac{0}{0}$.
De nouveau, une idée peut être l'utilisation d'une quantité conjuguée.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x)=\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

Solution. Pour tout réel $x>2$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}&=\frac{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\frac{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\frac{2x+5-9}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}\\&=\frac{2x-4}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}.\end{aligned}$$

Ensuite, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \sqrt{2x+5}+3=\sqrt{2\times 2+5}+3=6$ puis

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

III. Limites et inégalités

1) Limites finies et inégalités

On admettra le théorème suivant

Théorème 9. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
Dans ce qui suit, a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et a est dans I ou une borne de I. D'autre part, ℓ et ℓ' sont deux réels.
On suppose que

- pour tout x de I, $f(x)\leqslant g(x)$,
- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\ell$,
- $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\ell'$,

alors $\ell\leqslant\ell'$.

2) Limites infinies et inégalités

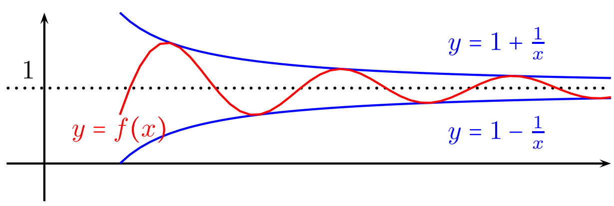
On admettra le théorème suivant

Théorème 10. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
Dans ce qui suit, a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et a est dans I ou une borne de I.
1) Si pour tout x de I, on a $f(x)\leqslant g(x)$ et si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$.
2) Si pour tout x de I, on a $f(x)\leqslant g(x)$ et si $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

3) Théorème des gendarmes

Théorème 11 (théorème des gendarmes). Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I.
Dans ce qui suit a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et a est dans I ou une borne de I. D'autre part, ℓ désigne un réel.
Si pour tout réel x de I, on a $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si les fonctions f et h (les gendarmes) ont la même limite ℓ en a, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\ell$.

Par exemple, soit f une fonction vérifiant : pour tout $x\geqslant 2$, $1-\dfrac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant 1+\dfrac{1}{x}$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.



Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel } x > 0,\ f(x) = \frac{E(x)}{x}.$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution. Pour tout réel strictement positif x, $x - 1 \leqslant E(x) \leqslant x$ puis $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \dfrac{E(x)}{x} \leqslant \dfrac{x}{x}$ et donc

$$\text{pour tout réel strictement positif } x,\ 1 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.