Chapitre 3. Suites réelles

I. Généralités sur les suites

1) Différents modes de description d'une suite. Représentation graphique

a) Suites du type $u_n = f(n)$

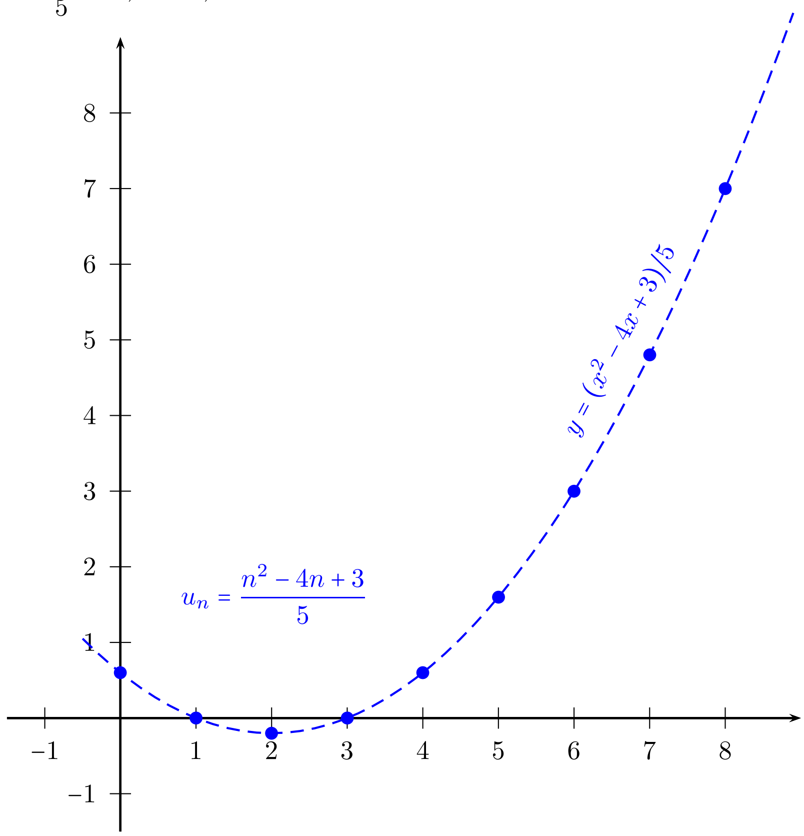
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels peut être décrite par une formule du type

$$\text{pour tout entier naturel, } u_n = f(n),$$

où f est une certaine fonction. Dans ce cas, on obtient directement la valeur d'un terme donné en remplaçant n par une valeur précise. Par exemple, si pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 4n + 3$, on obtient directement la valeur de u_3 en remplaçant n par 3 :

$$u_3 = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0.$$

Si on veut représenter graphiquement une telle suite, on place dans le plan rapporté à un repère orthonormé les points de coordonnées $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$ et de manière générale « tous » les points de coordonnées (n, u_n), $n \in \mathbb{N}$. On peut éventuellement s'aider du graphe de la fonction f. Par exemple, la représentation graphique de la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2 - 4n + 3}{5}$, $n \in \mathbb{N}$, est :



b) Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels peut aussi être décrite par la donnée de son premier terme u_0 et une formule du type

$$\text{pour tout entier naturel, } u_{n+1} = f(u_n).$$

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une **relation de récurrence**. Si on veut connaître la valeur de u_3, on doit connaître la valeur de u_2 et si on veut connaître la valeur de u_2, on doit connaître la valeur de u_1 et si on veut connaître la valeur de u_1, on doit connaître la valeur de u_0. On part donc de u_0 puis on calcule les termes de la suite l'un après l'autre, de proche en proche.

Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_0 = 7 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{5}.$$

Si on veut u_2, on calcule d'abord u_1. Pour obtenir u_1, on remplace n par 0 dans la relation de récurrence et on obtient $u_1 = \dfrac{u_0^2 - 4u_0 + 3}{5} = \dfrac{7^2 - 4 \times 7 + 3}{5} = \dfrac{24}{5} = 4,8$. Pour obtenir u_2, on remplace n par 1 dans la relation de récurrence et on obtient $u_2 = \dfrac{u_1^2 - 4u_1 + 3}{5} = \dfrac{4,8^2 - 4 \times 4,8 + 3}{5} = 1,368$.

On veut maintenant représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

• On commence par construire la courbe représentative de f notée $(\mathscr{C}_f)$ ainsi que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.

• On place u_0 sur l'axe des abscisses.

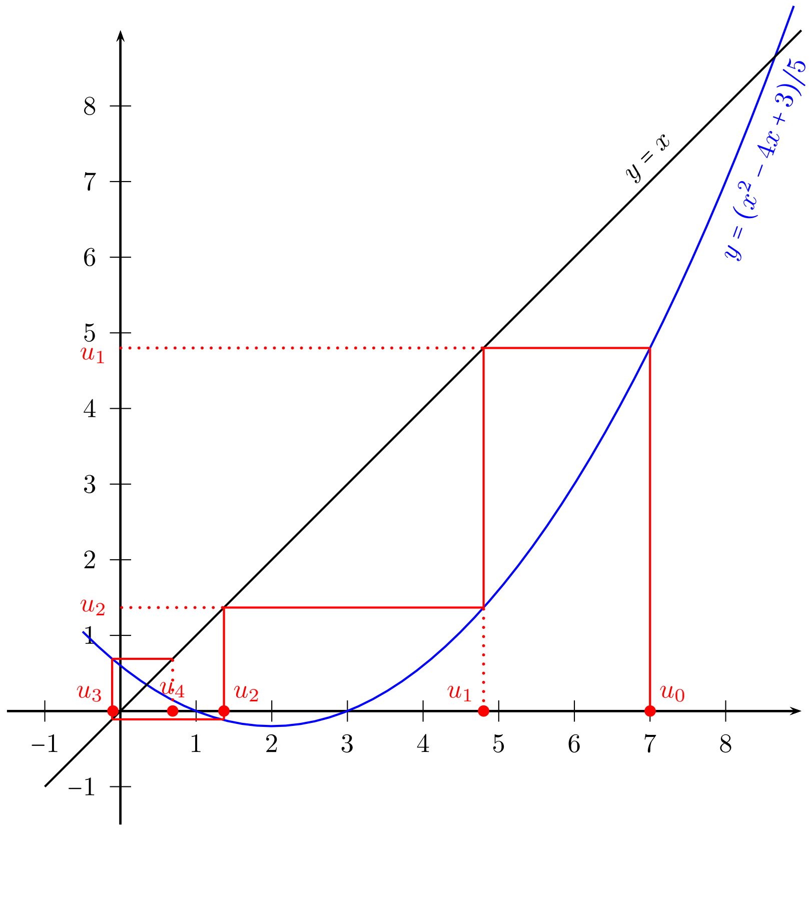
• On veut maintenant lire le nombre $u_1 = f(u_0)$ sur le graphique. Pour cela, on trace un trait vertical du point de l'axe des abscisses d'abscisse u_0 à $(\mathscr{C}_f)$ c'est-à-dire le segment joignant les points de coordonnées $(u_0, 0)$ et $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$. On peut alors lire u_1 horizontalement sur l'axe des ordonnées.

• On veut maintenant lire $u_2 = f(u_1)$. Pour cela, on doit d'abord ramener le nombre u_1 sur l'axe (Ox) en traçant le trait horizontal joignant le point de coordonnées (u_0, u_1) et la droite $(\mathscr{D})$ c'est-à-dire le segment joignant les points de coordonnées (u_0, u_1) et (u_1, u_1). On peut maintenant lire u_1 sur l'axe (Ox).

• On veut maintenant lire le nombre $u_2 = f(u_1)$. Le trait plein est pour l'instant arrêté au point de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées (u_1, u_1) et on lira $u_2 = f(u_1)$ en traçant le trait vertical joignant le point de coordonnées (u_1, u_1) à la courbe $\mathscr{C}_f$ c'est-à-dire le point de coordonnées (u_1, u_1) au point de coordonnées $(u_1, f(u_1)) = (u_1, u_2)$. On peut alors lire le nombre u_2 en allant horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées.

• On ramène le nombre u_2 sur l'axe des abscisses en traçant le trait horizontal joignant le point de coordonnées (u_1, u_2) au point de $\mathscr{D}$ de coordonnées (u_2, u_2). On peut alors lire u_2 sur l'axe (Ox).

• et ainsi de suite : verticalement jusqu'à la courbe, horizontalement jusqu'à la droite, verticalement jusqu'à la courbe, horizontalement jusqu'à la droite, ...



2) Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.
1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si et seulement si il existe un réel M tel que

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant M.$$

Un tel réel M s'appelle un **majorant** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si et seulement si il existe un réel m tel que

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant m.$$

Un tel réel m s'appelle un **minorant** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois majorée et minorée. Ceci équivaut au fait qu'il existe deux réels m et M tels que

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ m \leqslant u_n \leqslant M.$$

Les réels m et M fournis dans la définition précédente sont des réels **indépendants** de n. Les réels m et M ne varient pas quand n varie. Ainsi, si on écrit : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$, le nombre 3 est un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a majoré la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de la définition précédente. Mais si on écrit : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n$, on n'a pas majoré la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de la définition précédente.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = -3n + 4.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Solution. Soit n un entier naturel naturel.

$$n \geqslant 0 \Rightarrow -3n \leqslant 0 \Rightarrow -3n + 4 \leqslant 0 + 4 \Rightarrow u_n \leqslant 4.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par le nombre 4.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{3n+14}{n+5}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{14}{5} \leqslant u_n < 3$.

Solution. Soit n un entier naturel naturel.

$$u_n - \frac{14}{5} = \frac{3n+14}{n+5} - \frac{14}{5} = \frac{5(3n+14) - 14(n+5)}{5(n+5)} = \frac{n}{5(n+5)}.$$

Puisque $\frac{n}{5(n+5)} \geqslant 0$, on en déduit que $u_n - \frac{14}{5} \geqslant 0$ et donc que $u_n \geqslant \frac{14}{5}$. Ensuite,

$$u_n - 3 = \frac{3n+14}{n+5} - 3 = \frac{(3n+14) - 3(n+5)}{n+5} = -\frac{1}{n+5}.$$

Puisque $-\frac{1}{5(n+5)} < 0$, on en déduit que $u_n - 3 < 0$ et donc que $u_n < 3$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $\frac{14}{5} \leqslant u_n < 3$. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Commentaire. Dans l'exercice 2, nous avons démontré que $u_n < 3$. Le problème initial est délicat car dans l'écriture $u_n = \frac{3n+14}{n+5}$, la lettre n **apparaît plusieurs fois**, contrairement à l'exercice 1. Si on cherche à écrire directement des inégalités, on peut tenter : $n \geqslant 0 \Rightarrow 3n + 14 \geqslant 14$ et $n \geqslant 0 \Rightarrow n + 5 \geqslant 5$. Mais il n'y a rien à tirer de ces inégalités. Quand on écrit que le numérateur $3n + 14$ vaut au minimum 14, on devrait se diriger vers un résultat du type : la fraction $\frac{3n+14}{n+5}$ vaut **au minimum** un certain nombre. Mais quand on écrit que le dénominateur $n + 5$ vaut au minimum 5, on devrait se diriger vers un résultat du type : la fraction $\frac{3n+14}{n+5}$ vaut **au maximum** un certain nombre et on ne parvient pas à utiliser les deux inégalités en même temps.

On doit se rappeler que

on ne divise pas membre à membre des inégalités.

Pour montrer que $u_n \geqslant \dfrac{14}{5}$ ou que $u_n < 3$, nous avons utilisé le résultat suivant :

$$A \leqslant B \Leftrightarrow B - A \geqslant 0.$$

Nous avons donc calculé les deux différences $u_n - \dfrac{14}{5}$ et $u_n - 3$ puis nous avons précisé le signe de ces deux différences.

3) Sens de variation d'une suite

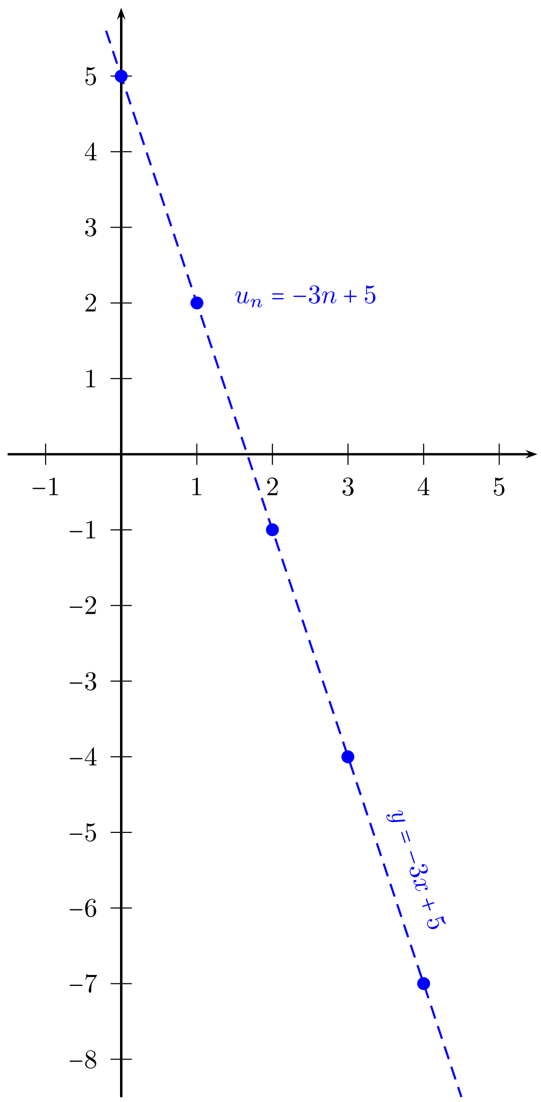
a) Définitions

Définition 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.
1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$. Ceci équivaut au fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois croissante et décroissante.
4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
5) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
6) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si et seulement si ou bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ou bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si et seulement si ou bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, ou bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exemple 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = -3n + 5$. Pour tout entier naturel,

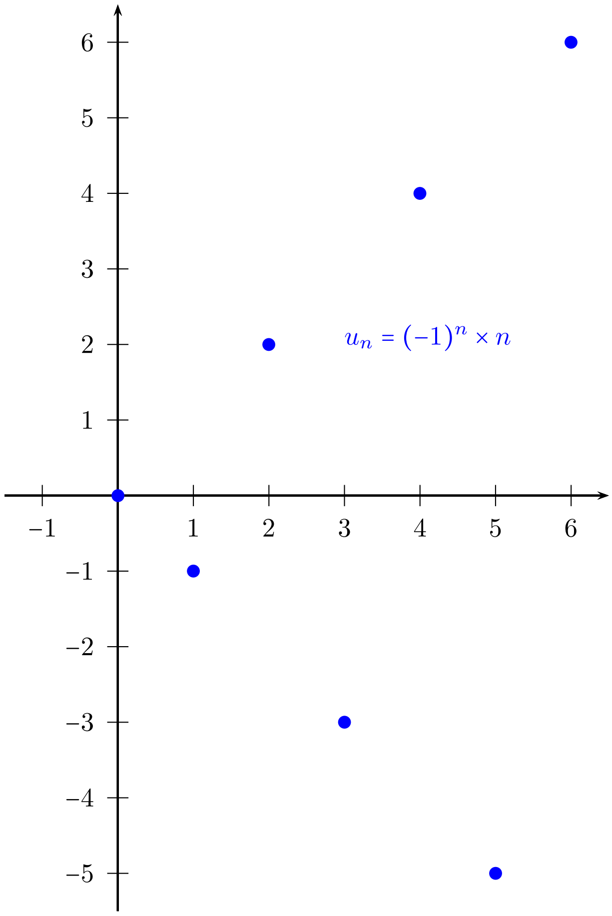
$$n < n + 1 \Rightarrow -3n > -3(n + 1) \Rightarrow -3n + 5 > -3(n + 1) + 5 \Rightarrow u_n > u_{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$ ou encore pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement décroissante.



Exemple 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n \times n$.
$u_0 = 0$ et $u_1 = -1$. En particulier, $u_0 > u_1$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
Mais $u_1 = -1$ et $u_2 = 2$. En particulier, $u_1 < u_2$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

En résumé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante ou encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.



> **Théorème 1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
> $$(\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n) \Leftrightarrow (\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = u_0).$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0$, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0$ et $u_{n+1} = u_0$ puis $u_{n+1} = u_n$.

Réciproquement, supposons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel, $u_n = u_0$.

- Le résultat est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = u_0$. Alors, puisque $u_{n+1} = u_n$, on a aussi $u_{n+1} = u_0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0$.

> **Théorème 2.** **1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels.
>
> Pour tout entier naturel p et tout entier naturel $n \geqslant p$, on a $u_n \geqslant u_p$.
> En particulier, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_0$.
>
> **2)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels.
>
> Pour tout entier naturel p et tout entier naturel $n \geqslant p$, on a $u_n \leqslant u_p$.
> En particulier, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_0$.

Démonstration. **1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels. Soit p un entier naturel.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

- Le résultat est vrai pour $n = p$.
- Soit $n \geqslant p$. Supposons que $u_n \geqslant u_p$. Alors, puisque $u_{n+1} \geqslant u_n$ et que $u_n \geqslant u_p$, on a aussi $u_{n+1} \geqslant u_p$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

En particulier, quand $p = 0$, on obtient : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant u_0$.

Enfin, les résultats du 2), s'obtiennent en remplaçant le symbole $\geqslant$ par le symbole $\leqslant$.

---

b) Quelques techniques pour étudier le sens de variation d'une suite

Technique 1. Quand l'expression de u_n en fonction de n ne contient qu'une seule fois la lettre n, on part de l'inégalité $n < n+1$ puis par opérations successives, on parvient à une inégalité entre u_n et u_{n+1}.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 4 - \frac{17}{\sqrt{2^n+1}}.$$

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
n < n+1 &\Rightarrow 2^n < 2^{n+1} \Rightarrow 2^n+1 < 2^{n+1}+1\\
&\Rightarrow \sqrt{2^n+1} < \sqrt{2^{n+1}+1}\ (\text{car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[)\\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}+1}}\ (\text{car } \sqrt{2^n+1} > 0 \text{ et la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[)\\
&\Rightarrow -\frac{17}{\sqrt{2^n+1}} < -\frac{17}{\sqrt{2^{n+1}+1}} \Rightarrow 4 - \frac{17}{\sqrt{2^n+1}} < 4 - \frac{17}{\sqrt{2^{n+1}+1}}\\
&\Rightarrow u_n < u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Technique 2. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

Remarque. La technique 2 est la technique la plus fréquemment utilisée dans la pratique.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{3^n}{(n+1)^2}.$$

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3^{n+1}}{(n+2)^2} - \frac{3^n}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}(n+1)^2 - 3^n(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = 3^n\frac{3(n+1)^2 - (n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}\\
&= 3^n\frac{3(n^2+2n+1) - (n^2+4n+4)}{(n+1)^2(n+2)^2} = 3^n\frac{3n^2+6n+3-n^2-4n-4}{(n+1)^2(n+2)^2}\\
&= 3^n\frac{2n^2+2n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}.
\end{aligned}$$

Tout d'abord, $u_1 - u_0 = -\frac{1}{4}$ et donc $u_1 < u_0$. Puis, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, on a $2n^2 + 2n - 1 \geqslant 0 + 2 - 1 > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi, $u_1 < u_0$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n > 0$ ou encore $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 1.

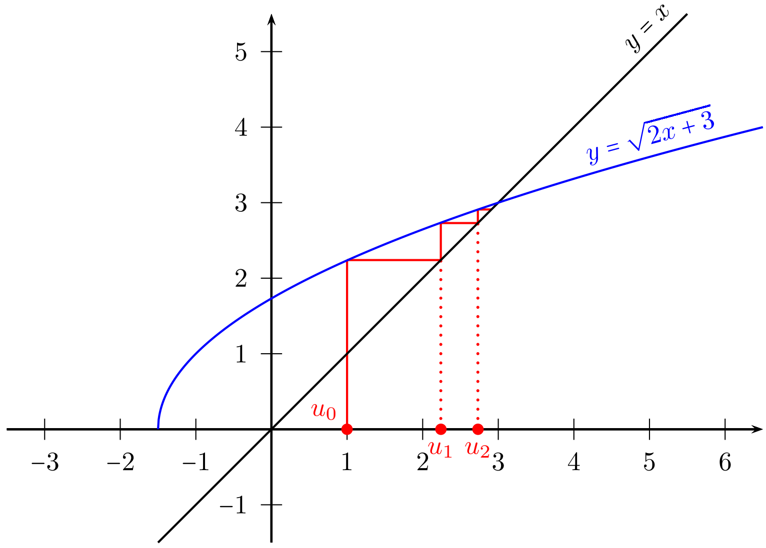
Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}.$$

1) Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $1 \leqslant u_n < 3$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n+1)(3-u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$.
b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. 1) Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $1 \leqslant u_n < 3$.

- Puisque $u_0 = 1$, le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et que $1 \leqslant u_n < 3$ et montrons que u_{n+1} existe et que $1 \leqslant u_{n+1} < 3$.

Puisque u_n existe et que $u_n \geqslant 1$, on a en particulier $2u_n + 3 \geqslant 0$. Mais alors u_{n+1} existe. Ensuite,

$$\begin{aligned}
1 \leqslant u_n < 3 &\Rightarrow 2\times 1+3 \leqslant 2u_n+3 < 2\times 3+3 \Rightarrow 5 \leqslant 2u_n+3 < 9\\
&\Rightarrow \sqrt{5} \leqslant \sqrt{2u_n+3} < \sqrt{9} \text{ (car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[)\\
&\Rightarrow \sqrt{5} \leqslant u_{n+1} < 3\\
&\Rightarrow 1 \leqslant u_{n+1} < 3 \text{ (car } \sqrt{5} \geqslant 1).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $1 \leqslant u_n < 3$.

3) a) Soit n un entier naturel. Puisque $u_n \geqslant 1$, $\sqrt{2u_n+3} + u_n$ est un nombre supérieur ou égal à 1 et en particulier $\sqrt{2u_n+3} + u_n$ n'est pas nul. Ensuite,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+3} - u_n &= \frac{\left(\sqrt{2u_n+3} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+3} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} = \frac{\left(\sqrt{2u_n+3}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}\\
&= \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} = \frac{(u_n+1)(3-u_n)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n},
\end{aligned}$$

car $(3-u_n)(u_n+1) = 3u_n + 3 - u_n^2 - u_n = -u_n^2 + 2u_n + 3$.

b) Soit n un entier naturel. Puisque $1 \leqslant u_n < 3$, $3 - u_n > 0$, $u_n + 1 > 0$ et $\sqrt{2u_n+3} + u_n > 0$. Par suite, $\dfrac{(3-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} > 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n > 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ ou encore $u_n < u_{n+1}$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Technique 3. Si u_n est défini par des produits et des quotients et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ au nombre 1.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ où } n! = 1\times 2\times\ldots\times n.$$

Etudier les sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. Soit n un entier naturel non nul. $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = 2 \times \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n \times (n+1)}$$
$$= \frac{2}{n+1},$$

puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2}{n+1} - 1 = \frac{2-(n+1)}{n+1} = \frac{1-n}{n+1}.$$

Puisque $n \geqslant 1$, $1-n \leqslant 0$ puis $\dfrac{1-n}{n+1} \leqslant 0$ puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leqslant 0$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
Puisque $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} \leqslant u_n$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Plus précisément, pour tout $n \geqslant 2$, $1-n < 0$ puis $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante à partir du rang 2.

Technique 4. Si la suite est du type $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, où f est une certaine fonction définie sur $[0,+\infty[$, on peut utiliser les variations de la fonction f pour préciser les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les variations de la fonction f peuvent être obtenues à partir du signe de la dérivée de la fonction f si cette fonction est dérivable. Cependant, attention ! On dérive une fonction mais

on ne dérive pas une suite.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n^2+4n+2}{n+1}$.

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Pour tout réel positif x, posons $f(x) = \dfrac{x^2+4x+2}{x+1}$ de sorte que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{(2x+4)\times(x+1) - (x^2+4x+2)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{(2x^2+2x+4x+4)-(x^2+4x+2)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+6x+4-x^2-4x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}.$$

La dérivée f' de f est une fonction strictement positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction f est une fonction strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant n < n+1 \Rightarrow f(n) < f(n+1) \Rightarrow u_n < u_{n+1}.$$

Ainsi, tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

---

c) Sens de variation d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique

Théorème 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$. Donc,

• si $r > 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ;
• si $r < 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
• si $r = 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Théorème 4. Soit q un réel strictement positif.
• Si $q > 1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
• Si $0 < q < 1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
• Si $q = 1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration. Soit q un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q$. Donc,

• si $q > 1$, alors pour tout entier naturel n, $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} > 1$ puis $q^{n+1} > q^n$ car $q^n > 0$. On en déduit que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ;
• si $0 < q < 1$, alors pour tout entier naturel n, $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} < 1$ puis $q^{n+1} < q^n$ car $q^n > 0$. On en déduit que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
• si $q = 1$, alors pour tout entier naturel n, $q^n = 1$ et donc la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

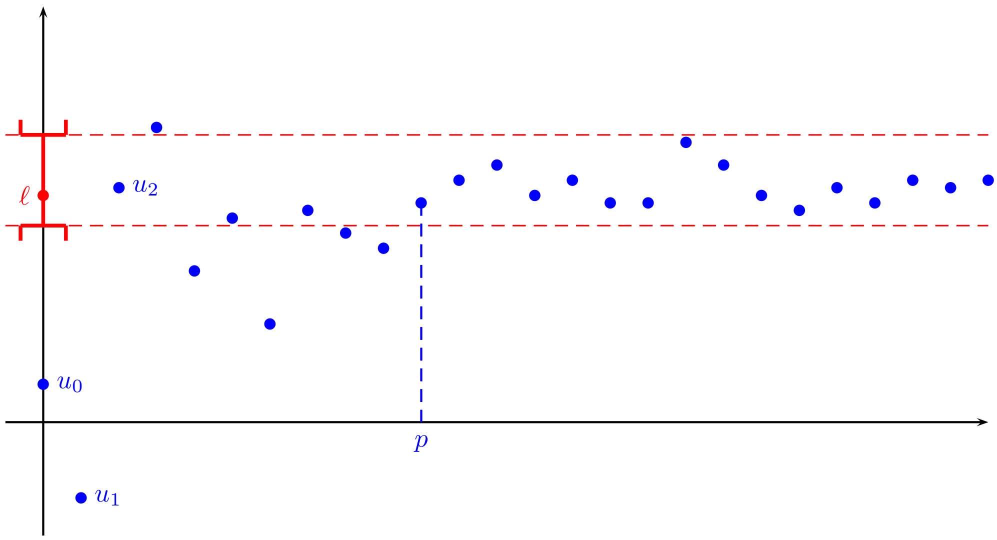
II. Limite d'une suite

1) Définition de la convergence d'une suite

Définition 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels et ℓ un nombre réel.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **a pour limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$ ou aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert non vide contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite ℓ qui est un réel, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** ou que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.
Dans le cas contraire, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** ou que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.

Interprétation graphique. On place ℓ sur l'axe des ordonnées puis on se donne un intervalle ouvert I quelconque contenant ℓ. A partir d'un certain rang p dépendant de l'intervalle I que l'on s'est donné, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle I. Pour n'importe quel intervalle ouvert I contenant ℓ, aussi petit soit-il, on peut fournir un tel rang p.

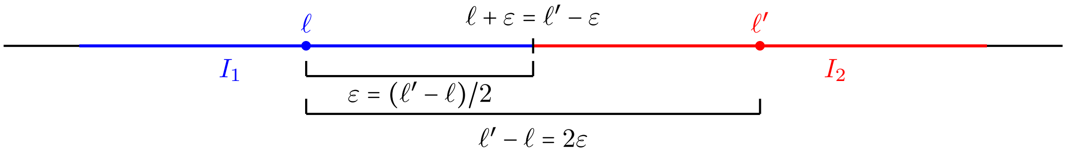


Théorème 5. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, le nombre ℓ de la définition 3 est unique.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à la fois vers le réel ℓ et vers le réel ℓ' où de plus $\ell < \ell'$ (on a appelé ℓ le plus petit des deux réels distincts et ℓ' le plus grand).

Soit $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{2}$. ε est un réel strictement positif.

Posons $I_1 =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et $I_2 =]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$. Les intervalles I_1 et I_2 sont disjoints ou encore les intervalles I_1 et I_2 n'ont aucun nombre réel en commun.



On applique la définition 3 aux deux intervalles I_1 et I_2.
Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang p_1 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I_1 et il existe un rang p_2 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I_2.

Soit p le plus grand des deux rangs p_1 et p_2. Alors, u_p est dans I_1 et dans I_2. Ceci contredit le fait que les intervalles I_1 et I_2 n'ont aucun réel en commun. Il était donc absurde de supposer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers deux limites distinctes et on a montré que $\ell = \ell'$.

Notation. Quand la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

> **Théorème 6.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels et ℓ un nombre réel.
> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert non vide **de centre** ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Démonstration. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. Alors, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Réciproquement, supposons que tout intervalle ouvert de centre ℓ contienne tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Soient α et β deux réels strictement positifs puis $I =]\ell - \alpha, \ell + \beta[$. Soit ε le plus petit des deux réels α et β. L'intervalle $I' =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est un intervalle ouvert de centre ℓ. Il contient donc tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A partir d'un certain rang p. Comme I' est contenu dans I, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang supérieur ou égal à p sont aussi dans l'intervalle I. On a montré que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Exemple 1. Montrons en revenant à la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

Soit ε un réel strictement positif. On note I l'intervalle $]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$.

Soit n un entier naturel.

$$u_n \in I \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < u_n < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - 2 < \varepsilon.$$

Or,

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+3} - 2 = \frac{(2n+1) - 2(n+3)}{n+3} = \frac{2n+1-2n-6}{n+3} = -\frac{5}{n+3}.$$

Ainsi, $u_n \in I \Leftrightarrow -\varepsilon < -\dfrac{5}{n+3} < \varepsilon$. Puisque n est un entier naturel, $-\dfrac{5}{n+3} < 0$ et en particulier l'inégalité $-\dfrac{5}{n+3} < \varepsilon$ est vraie. Il reste

$$\begin{aligned} u_n \in I &\Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{5}{n+3} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{n+3} \Leftrightarrow n+3 > \frac{5}{\varepsilon} \text{ (car } \varepsilon > 0) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3. \end{aligned}$$

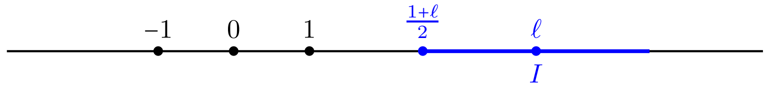
Soit p un entier strictement supérieur à $\dfrac{5}{\varepsilon} - 3$ (si $\dfrac{5}{\varepsilon} - 3 < 0$, on peut prendre $p = 0$ et si $\dfrac{5}{\varepsilon} - 3 \geqslant 0$, on peut prendre $p = E\left(\dfrac{5}{\varepsilon} - 3\right) + 1$ (où E désigne la fonction « partie entière »)).

Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant p$, on a encore $n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 3$ et donc $u_n \in I$. Ainsi, tout intervalle ouvert de centre 2 contient tous les termes de la suite $\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$.

Exemple 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n$. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers aucun réel ℓ.

Soit ℓ un réel. Il y a cinq cas possibles concernant ℓ : 1) $\ell > 1$, 2) $\ell = 1$, 3) $-1 < \ell < 1$, 4) $\ell = -1$, 5) $\ell < -1$. On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ dans les deux premiers cas, les autres cas se traitant de manière similaire.

• Supposons $\ell > 1$ et montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ.



La distance de 1 à ℓ est $\ell - 1$. C'est un réel strictement positif. Le milieu du segment $[1, \ell]$ est $\dfrac{1+\ell}{2}$. La distance de ce milieu à 1 ou ℓ est $\dfrac{\ell-1}{2}$. Soit $I = \left]\ell - \dfrac{\ell-1}{2}, \ell + \dfrac{\ell-1}{2}\right[= \left]\dfrac{1+\ell}{2}, \dfrac{3\ell-1}{2}\right[$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 et l'intervalle I est constitué de réels tous strictement plus grands que 1 (car $\dfrac{1+\ell}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$). Donc, l'intervalle I est un intervalle ouvert de centre ℓ ne contenant aucun terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en particulier ne contenant aucun terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ.

• Supposons $\ell = 1$ et montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ.

Soit $I =]0, 2[$. I est un intervalle ouvert de centre 1. Vérifions qu'il n'existe pas de rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle I.

Soit p un entier naturel. Soit n un entier naturel impair supérieur ou égal à p (on peut prendre $n = p$ si p est impair et $n = p + 1$ si p est pair). Puisque n est impair, $(-1)^n$ est le produit d'un nombre impair de -1 et est donc égal Ã -1. Par suite, $(-1)^n \notin I$.

On a montré que pour tout rang p, il existe au moins un rang $n \geqslant p$ tel que $(-1)^n \notin I$.
Finalement, on a fourni un intervalle ouvert de centre 1 qui ne contient pas tous les termes de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang et donc la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1.

La conclusion serait la même dans les trois derniers cas. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un exemple de suite divergente.

Remarque. On ne peut pas se permettre de dire que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 et -1. Tout d'abord parce qu'on vient de montrer que cette suite n'a pas de limite, mais aussi parce qu'on a démontré que si une suite a une limite, cette limite est unique.

2) Suites de limite infinie

Définition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Notation. Quand u_n a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Quand u_n a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque. Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ est une suite divergente.

Exemple. Montrons que la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 3n + 2$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On note d'abord que pour tout entier naturel n, $u_n = n + n^2 + 2n + 2$ et donc $u_n \geqslant n$.
Soient alors A un réel puis $I =]A, +\infty[$. Soit p un entier strictement plus grand que A (on peut prendre par exemple $p = 0$ si $A < 0$ et $p = E(A) + 1$ si $A \geqslant 0$ (où E désigne la fonction « partie entière »)).
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a $u_n \geqslant n \geqslant p > A$ et donc $u_n \in I$.

On a montré que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Limites des suites de référence

Théorème 7.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
Pour tout entier $k \geqslant 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

Démonstration. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Soit A un réel puis $I =]A, +\infty[$.
• Supposons $A < 0$. Alors, pour tout entier naturel n, $\sqrt{n} > A$ ou encore $\sqrt{n} \in I$. Dans ce cas, tous les termes de la suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans I.
• Supposons $A \geqslant 0$. Soit p un entier strictement supérieur à A^2 (on peut prendre par exemple $p = E(A^2) + 1$ où E désigne la fonction « partie entière »). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à p. Puisque $p > A^2$, on a encore $n > A^2$ puis $\sqrt{n} > A$ car $A \geqslant 0$ et par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. Dans ce cas, tous les termes de la suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans I à partir du rang p.

Nous vous laissons le soin de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ en revenant à la définition ou plus généralement que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$. Néanmoins, ce résultat se démontre plus aisément en constatant que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $n^k \geqslant n$ et en utilisant un théorème exposé plus loin : si pour tout n, $v_n \geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Les trois résultats $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ peuvent se démontrer en revenant à la définition. Néanmoins, ils sont la conséquence d'un résultat exposé plus loin : l'inverse d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite tendant vers 0.

Nous allons maintenant étudier la limite d'une suite géométrique (théorème 9). Pour démontrer ce théorème, on a besoin d'un résultat préliminaire qui est l'objet du théorème 8.

Théorème 8. Pour tout réel positif a et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (inégalité de Bernoulli).

Démonstration. Soit a un réel. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

• $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. Comme $1 \geqslant 1$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ et montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \times (1+a)\\ &\geqslant (1+na)(1+a) \text{ (par hypothèse de récurrence et car } 1+a \geqslant 0)\\ &= 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2\\ &\geqslant 1 + (n+1)a \text{ (car } na^2 \geqslant 0).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Théorème 9. Soit q un réel.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$, q^n n'a pas de limite, ni réelle, ni infinie.

Démonstration. • Soit q un réel strictement plus grand que 1. Posons $a = q - 1$ de sorte que a est un réel strictement positif et que $q = 1 + a$. Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. On va utiliser les théorèmes du paragraphe 4 et le théorème 13 du paragraphe 5)a).

D'après le théorème 8, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ ou encore $q^n \geqslant 1 + na$. Puisque $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + an) = +\infty$ (d'après le théorème 10 du paragraphe 4).

Ainsi, pour tout entier naturel n, $q^n \geqslant 1 + na$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

• Si $q = 1$, alors pour tout entier naturel n, $q^n = 1$ et donc immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

• Si $0 < q < 1$, alors $\frac{1}{q} > 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$. D'après le théorème 12 du paragraphe 4), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1/q^n} = 0$.

• On admet les résultats des autres cas.

4) Opérations sur les limites

a) Somme de deux suites

On admettra le théorème suivant dont les résultats sont très intuitifs.

Théorème 10. (limite d'une somme de deux suites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ', alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell'$.
2) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$, la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$.
3) Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$, la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$.
4) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on ne peut pas conclure car tout est possible pour la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On résume ces différents résultats dans un tableau.

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
(u_n+v_n) a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Le tableau ci-dessus comporte un **?**. Quand la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et que la suite (v_n) tend vers $-\infty$, tout est possible et on ne peut donc pas donner de résultat général. Voici quatre exemples montrant que l'on peut vraiment obtenir n'importe quel résultat pour la suite (u_n+v_n). Dans chacun des quatre cas ci-dessous, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et la suite (v_n) tend vers $-\infty$.

- $u_n=n^2+n$, $v_n=-n^2$, $u_n+v_n=n$. Dans ce cas, la suite (u_n+v_n) tend vers $+\infty$.
- $u_n=n^2-n$, $v_n=-n^2$, $u_n+v_n=-n$. Dans ce cas, la suite (u_n+v_n) tend vers $-\infty$.
- $u_n=n^2+1$, $v_n=-n^2$, $u_n+v_n=1$. Dans ce cas, la suite (u_n+v_n) tend vers 1.
- $u_n=n^2+(-1)^n$, $v_n=-n^2$, $u_n+v_n=(-1)^n$. Dans ce cas, la suite (u_n+v_n) n'a pas de limite.

b) Produit de deux suites

Théorème 11. (limite d'un produit de de deux suites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ', alors la suite $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\ell\times\ell'$.
2) a) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell>0$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), la suite $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell<0$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), la suite $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
3) a) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ ou toutes les deux vers $-\infty$, la suite $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
b) Si l'une des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou l'autre tend vers $-\infty$, la suite $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
4) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, on ne peut pas conclure car tout est possible pour la suite $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On résume ces différents résultats dans un tableau.

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$(u_n\times v_n)$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Remarque. Le cas particulier où l'une des deux suites est une suite constante et non nulle fournit les différents résultats pour la suite (ku_n) où k est un réel non nul.

Encore une fois, le tableau comporte un **?**. Voici quatre exemples où la suite (u_n) tend vers 0 et la suite (v_n) tend vers $\pm\infty$ avec à chaque fois un résultat différent concernant la suite $(u_n\times v_n)$.

- $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v_n=n^2$, $u_n\times v_n=n$. Dans ce cas, la suite $(u_n\times v_n)$ tend vers $+\infty$.
- $u_n=\dfrac{1}{n^2}$, $v_n=n$, $u_n\times v_n=\dfrac{1}{n}$. Dans ce cas, la suite $(u_n\times v_n)$ tend vers 0.

- $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = n$, $u_n \times v_n = 1$. Dans ce cas, la suite $(u_n \times v_n)$ tend vers 1.
- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $v_n = n$, $u_n \times v_n = (-1)^n$. Dans ce cas, la suite $(u_n \times v_n)$ n'a pas de limite.

c) Quotient de deux suites

Théorème 12. (limite d'un quotient de de deux suites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell' \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.
2) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3) a) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel $\ell' > 0$ (respectivement $\ell' < 0$), la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel $\ell' < 0$ (respectivement $\ell' > 0$), la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
4) a) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel $\ell > 0$ ou vers $+\infty$ (respectivement vers un réel $\ell < 0$ ou vers $-\infty$) et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive (respectivement strictement négative) à partir d'un certain rang et tend vers 0, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.
b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel $\ell > 0$ ou vers $+\infty$ (respectivement vers un réel $\ell < 0$ ou vers $-\infty$) et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative (respectivement strictement positive) à partir d'un certain rang et tend vers 0, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.
5) Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers 0 ou toutes les deux vers $\pm\infty$, on ne peut pas conclure car tout est possible pour la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

On résume ces différents résultats dans un tableau.

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
(v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	0 en étant > 0	0 en étant > 0	0 en étant < 0	0 en étant < 0	0
$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Remarque. En particulier, l'inverse d'une suite tendant vers l'infini est une suite tendant vers 0 et l'inverse d'une suite strictement positive ou strictement négative tendant vers 0 est une suite tendant vers l'infini (+ ou −).
On résume ces résultats avec les deux égalités

$$\frac{1}{0} = \infty \text{ et } \frac{1}{\infty} = 0.$$

L'écriture $\dfrac{1}{0}$ ne signifie pas que l'on a divisé le nombre 1 par le nombre 0 mais que l'on a divisé une suite tendant vers 1 par une suite tendant vers 0. De même, l'écriture $\dfrac{1}{\infty}$ ne signifie pas que l'on a divisé le nombre 1 par l'infini (qui n'est pas un nombre) mais que l'on a divisé une suite tendant vers 1 par une suite tendant vers l'infini.

Cette fois-ci, le tableau comporte deux **?**. Voici trois exemples où les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0 avec à chaque fois un résultat différent concernant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = n$. Dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$.
- $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{n}$. Dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0.
- $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1.

Voici trois autres exemples où les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ avec à chaque fois un résultat différent concernant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $u_n = n^2$, $v_n = n$, $\dfrac{u_n}{v_n} = n$. Dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$.
- $u_n = n$, $v_n = n^2$, $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{n}$. Dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0.
- $u_n = n$, $v_n = n$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1.

d) Les quatre formes indéterminées

Dans les théorèmes précédents, nous avons rencontré quatre situations où le résultat était imprévisible. Ces quatre situations sont les quatre **formes indéterminées** de la classe de terminale. L'une d'entre elles est à part : c'est la forme $+\infty - \infty$. Les trois autres vont ensemble car il s'agit en fait de la même forme indéterminée : ce sont les formes $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ et $0 \times \infty$. Il s'agit bien d'une seule et même indétermination en tenant compte des deux « égalités » : $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Les quatre formes indéterminées.

$$+\infty - \infty \quad \Big| \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \times \infty$$

Quand on n'est en présence d'une telle forme indéterminée, les théorèmes 10, 11 et 12 affirment que l'on ne peut pas conclure avec cette écriture de la suite. Ceci ne signifie pas que tout s'arrête et que l'on ne sait pas faire l'exercice. Cela signifie que l'on doit chercher une autre écriture de la suite sous laquelle l'indétermination disparaît. La principale technique est :

on met le terme prépondérant en facteur.

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 2n^2 - 3n + 5$. $2n^2$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et $-3n + 5$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Nous sommes donc face à une forme indéterminée. Il n'est pas nécessaire de le constater sur une copie. En présence d'une forme indéterminée, la première chose à ne pas faire est d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$ car on ne sait même pas si cette limite existe. On transforme d'abord l'écriture de u_n en mettant le terme prépondérant $2n^2$ en facteurs sans écrire le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$: pour tout entier naturel **non nul** n,

$$u_n = 2n^2 - 3n + 5 = 2n^2\left(\frac{2n^2}{2n^2} - \frac{3n}{2n^2} + \frac{5}{2n^2}\right) = 2n^2\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2}\right).$$

Dans la parenthèse est apparue une somme dont le premier terme est 1. Les autres termes tendent vers 0 car ils sont le résultat de la division d'un terme par un terme prépondérant. La parenthèse tend donc vers 1 et il n'y a plus qu'à donner la limite du terme prépondérant mis en facteur. L'indétermination a été levée et on peut maintenant utiliser le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{3}{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2n^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{2n} + \dfrac{5}{2n^2} = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$. En effectuant le produit des deux suites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2n^2\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2}\right) = +\infty.$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{2n^2 - 5n + 7}{3n^2 + n + 1}.$$

Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{2n^2 - 5n + 7}{3n^2 + n + 1} = \frac{2n^2\left(\dfrac{2n^2}{2n^2} - \dfrac{5n}{2n^2} + \dfrac{7}{2n^2}\right)}{3n^2\left(\dfrac{3n^2}{3n^2} + \dfrac{n}{3n^2} + \dfrac{1}{3n^2}\right)} = \frac{2n^2}{3n^2} \times \frac{1 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{7}{2n^2}}{1 + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{3n^2}}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{7}{2n^2}}{1 + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{3n^2}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{5}{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{2n^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{7}{2n^2}\right) = 1$. De mÃªme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{3n^2}\right) = 1$.

En effectuant le quotient des deux suites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{7}{2n^2}}{1 + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{3n^2}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \times \frac{1 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{7}{2n^2}}{1 + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{3n^2}} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Commentaire. Dans l'exercice 8, nous étions en présence d'une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ (le numérateur tend vers $+\infty$ à cause de $2n^2$ et le dénominateur tend vers $+\infty$ à cause de $3n^2$). Nous n'avons pas mentionné cette indétermination dans la solution mais nous avons tout de suite transformé l'écriture de u_n sans écrire le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$.
Au numérateur, nous avons mis en facteur le terme prépondérant $2n^2$ en facteur et au dénominateur, nous avons mis en facteur le terme prépondérant $3n^2$. Nous avons ainsi fait apparaître explicitement le « face à face » entre $2n^2$ et $3n^2$ qui contient l'indétermination $\dfrac{\infty}{\infty}$. L'indétermination a été levée quand nous avons simplifié par n^2.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \sqrt{4n^2 + n + 1} - n.$$

Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{4n^2 + n + 1} - n = \sqrt{4n^2\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}\right)} - n = \sqrt{4n^2}\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - n \\ &= 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - n = n\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - 1\right). \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{4n^2}\right) = 1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{4n^2}} - 1 = 2\sqrt{1} - 1 = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et finalement, en effectuant le produit des deux suites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} - 1\right) = +\infty.$$

Commentaire. Dans l'exercice précédent, nous étions en face d'une indétermination du type $+\infty - \infty$.
Le premier terme $\sqrt{4n^2 + n + 1}$ vaut environ $\sqrt{4n^2} = 2n$ et donc la différence $\sqrt{4n^2 + n + 1} - n$ vaut environ $2n - n = n$. Ce discours approximatif doit être remplacé par un calcul rigoureux. La technique consiste à mettre en facteur le prépondérant $4n^2$ en facteur sous la racine carrée.

Il existe d'autres techniques pour lever des indéterminations qui s'utilisent dans des circonstances très particulières. Nous en signalerons ici une : l'utilisation d'une **quantité conjuguée**.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n.$$

Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\
&= \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1 = 2$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ et donc en effectuant le quotient des deux suites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Commentaire. Nous étions en présence d'une indétermination du type $+\infty-\infty$. Mais si pratiquons comme dans l'exercice 9 :

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \ldots = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1\right),$$

nous transformons l'indétermination $+\infty-\infty$ en l'indétermination $\infty\times 0$. La différence avec l'exercice 9 est que $\sqrt{n^2}-n=0$ (alors que dans l'exercice précédent $\sqrt{4n^2}-n=n$).
Pour voir explicitement le « face à face » $\sqrt{n^2}-n=n-n=0$, il faudrait pouvoir élever au carré l'expression $\sqrt{n^2+n+1}$. Pour pouvoir élever au carré $\sqrt{a}$ dans l'expression $\sqrt{a}-b$, on utilise la **quantité conjuguée** $\sqrt{a}+b$:

$$\left(\sqrt{a}-b\right)\left(\sqrt{a}+b\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - b^2 = a-b^2.$$

Ainsi, on multiplie et on divise l'expression $\sqrt{n^2+n+1}-n$ par l'expression $\sqrt{n^2+n+1}+n$. L'effet est double : au numérateur on a maintenant $\left(n^2+n+1\right)-n^2=n+1$ et le « face à face » $n^2-n^2=0$ est apparu explicitement. Au dénominateur, il n'y a plus d'indétermination du type $+\infty-\infty$. Le dénominateur $\sqrt{n^2+n+1}+n$ tend vers $+\infty+\infty=+\infty$. On peut alors revenir à la technique du terme prépondérant en facteur.

5) Limites et inégalités

a) Limites finies et inégalités

On admettra le théorème suivant

Théorème 13. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
On suppose que
- il existe un rang p tel que pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ,
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ',

alors $\ell \leqslant \ell'$.

b) Limites infinies et inégalités

Théorème 14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
1) Si pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2) Si pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Montrons 1). Par hypothèse, il existe un rang p_1 tel que pour tout $n \geqslant p_1$, $v_n \geqslant u_n$.

Soit A un réel puis $I =]A, +\infty[$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang p_2 tel que pour tout $n \geqslant p_2$, u_n appartient à I.

Soit p le plus grand des deux entiers p_1 et p_2. Pour tout $n \geqslant p$, $v_n \geqslant u_n$ et $u_n > A$. Donc, pour tout $n \geqslant p$, $v_n > A$ ou encore v_n appartient à I. Par suite, l'intervalle I contient tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang p.

On a montré que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où A est un réel, contient tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Le 2) se montre de manière analogue.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

2) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

On suppose maintenant que $u_0 = -4$ et que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

3) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
b) Conjecturer une inégalité vérifiée par u_n puis démontrer cette inégalité par récurrence.
c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. **1)** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

- Puisque $u_0 = 0$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant n$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant n + 1$.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n &\Rightarrow 2u_n + 3 \geqslant 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant n + 1 + n + 2 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geqslant n + 1 \text{ (car } n + 2 \geqslant 0). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

2) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) a) $u_0 = -4$. $u_1 = 2u_0 + 3 = 2(-4) + 3 = -5$. $u_2 = 2u_1 + 3 = 2(-5) + 3 = -7$. $u_3 = 2u_2 + 3 = 2(-7) + 3 = -11$. $u_4 = 2u_3 + 3 = 2(-1) + 3 = -19$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n - 4$.

- Puisque $u_0 = -4$ et que $-0 - 4 = -4$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant -n - 4$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant -(n+1) - 4$ ou encore $u_{n+1} \leqslant -n - 5$.

$$\begin{aligned} u_n \leqslant -n - 4 &\Rightarrow 2u_n + 3 \leqslant 2(-n - 4) + 3 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant -2n - 5 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \leqslant -n - 5 - n \\ &\Rightarrow u_{n+1} \leqslant -n - 5 \text{ (car } -n \leqslant 0). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n - 4$.

c) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n - 4$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n - 4 = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

---

c) Théorème des gendarmes

Théorème 15 (théorème des gendarmes). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels. Si pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les gendarmes) convergent et ont la même limite ℓ,
alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration. Il existe un rang p_1 tel que pour tout $n \geqslant p_1$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Soient ε un réel strictement positif puis $I =]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang p_2 tel que pour tout $n \geqslant p_2$, $\ell-\varepsilon < u_n$ et puisque la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang p_3 tel que pour tout $n \geqslant p_3$, $w_n < \ell+\varepsilon$.

Soit p le plus grand des trois entiers p_1, p_2 et p_3. Pour tout entier naturel $n \geqslant p$, on a

$$\ell-\varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell+\varepsilon$$

et en particulier, pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $\ell-\varepsilon < v_n < \ell+\varepsilon$ ou encore v_n appartient à I. Tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle I à partir d'un certain rang.

On a montré que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Par exemple, soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : pour tout $n \geqslant 4$, $1-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Solution. Pour tout entier naturel non nul n, $(-1)^n$ est égal à 1 ou à -1.
Donc, pour tout entier naturel non nul n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ puis

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ -\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

---

d) Convergence des suites monotones

On admettra le théorème suivant :

Théorème 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Commentaire. Le théorème 16 ne donne pas la valeur de la limite de u_n. Il dit simplement que cette limite existe.

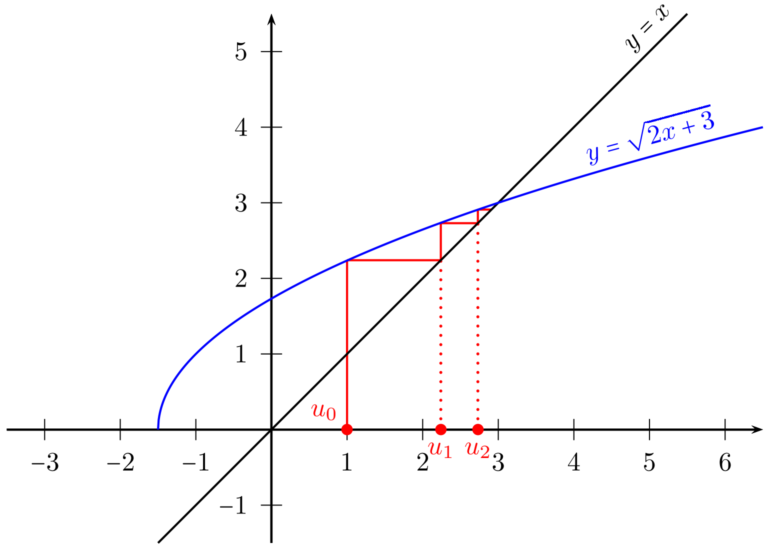
Exercice 13. On reprend la suite de l'exercice n° 5, page 6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}.$$

On a déjà montré dans l'exercice n° 5 que
- pour tout entier naturel n, u_n existe et $1 \leqslant u_n < 3$
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Solution. Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$. Quand n tend vers $+\infty$, u_{n+1} tend vers ℓ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = \ell$. D'autre part, quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt{2u_n+3}$ tend vers $\sqrt{2\ell+3}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\ell = \sqrt{2\ell+3}$. Ceci impose $\ell \geqslant 0$ puis $\ell^2 = 2\ell+3$ après élévation au carré des deux membres de l'égalité. Le nombre ℓ est donc un réel positif, solution de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16$. L'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet donc deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$. Puisque ℓ est positif, on obtient $\ell = 3$.

On a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Théorème 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels croissante et majorée. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un rang p tel que $u_p > \ell$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croisante, pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

Variante 1. On fait tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité : d'après le théorème 15, on a $\ell \geqslant u_p$. Ceci contredit le fait que $u_p > \ell$. Il était donc absurde de supposer qu'il existe un rang p tel que $u_p > \ell$ et on a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.

Variante 2. Considérons l'intervalle $I =]\ell-1, u_p[$. Puisque $\ell - 1 < \ell < u_p$, I est un intervalle ouvert contenant ℓ. On sait que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ et en particulier, pour tout $n \geqslant p$, u_n n'appartient pas à I.
I est donc un intervalle ouvert contenant ℓ et ne contenant pas tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. Ceci contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Il était donc absurde de supposer qu'il existe un rang p tel que $u_p > \ell$ et on a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.

Théorème 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels croissante et non majorée.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels croissante et non majorée.

Soient A un réel puis $I =]A, +\infty[$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, le nombre A n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc au moins un entier naturel p tel que $u_p > A$.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout entier naturel $n \geqslant p$, on a $u_n \geqslant u_p$ et donc $u_n > A$. Ainsi, il existe un rang p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \in I$.

On a montré que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
