

Chapitre 2. Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques

Nous allons ici rappeler les différents résultats sur les suites de nombres réels qui sont des suites arithmétiques ou des suites géométriques. Le chapitre 9 du cours de terminale S est consacré à l'étude des nombres complexes. Toutes les formules données dans ce chapitre 2 pour des suites réelles seront valables plus généralement pour des suites de nombres complexes.

I. Suites arithmétiques

1) Définition des suites arithmétiques

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r s'appelle alors la **raison** de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque. Le nombre r qui apparaît dans la définition précédente ne dépend pas de n ou encore r est constant quand n varie.

On peut donner une définition équivalente :

Définition 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Commentaire. La valeur de cette constante est alors la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est la définition 2 qui le plus souvent est utilisée dans la pratique pour montrer qu'une suite est arithmétique ou n'est pas arithmétique.

On note à ce sujet que : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = -2n + 7.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

Solution. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-2(n+1) + 7) - (-2n + 7) = (-2n - 2 + 7) - (-2n + 7) = -2n + 5 + 2n - 7 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -2$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -2 . Son premier terme est $u_0 = 7$.

Commentaire. Pour montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n . C'est ce que nous avons fait. Mais suivant le type d'exercice, on peut aussi chercher à montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 2n^2 - n + 1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

Solution. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 7$ puis $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = 7 - 2 = 5$. En particulier,

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0.$$

Ainsi, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

Commentaire. La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. Donc, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante si et seulement si il existe au moins un entier naturel n tel que $u_{n+2} - u_{n+1} \neq u_{n+1} - u_n$. Dans l'exercice précédent, pour montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante, nous avons fourni explicitement un rang n tel que $u_{n+2} - u_{n+1} \neq u_{n+1} - u_n$, à savoir $n = 0$.

2) Calcul de u_n en fonction n

Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + r.$$

Ainsi, pour calculer u_{17} , on doit connaître u_{16} et pour connaître u_{16} , on doit connaître $u_{15} \dots$

Un problème reste donc non résolu : exprimer directement u_n en fonction de n . Ce problème est résolu par le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

1) Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

2) Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

- $u_0 + 0 \times r = u_0$ et donc la formule est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = u_0 + nr$ et montrons que $u_{n+1} = u_0 + (n + 1)r$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \text{ (par définition d'une suite arithmétique de raison } r) \\ &= u_0 + nr + r \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_0 + (n + 1)r. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

2) Soient n et p deux entiers naturels. $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$. Donc

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = nr - pr = (n - p)r,$$

puis $u_n = u_p + (n - p)r$

Remarque. Dans le théorème précédent, l'ordre dans lequel sont les entiers n et p n'est pas précisé et on a tout à fait le droit d'appliquer la formule du 2) quand $p > n$. Par exemple, on a $u_9 = u_6 + (9 - 6)r = u_6 + 3r$ mais on a aussi $u_7 = u_{11} + (7 - 11)r = u_{11} - 4r$.

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n , $u_n = an + b$.

Démonstration. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, d'après le théorème 1, pour tout entier naturel n , $u_n = nr + u_0$. Par suite, si on pose $a = r$ et $b = u_0$, alors pour tout entier naturel n ,

$$u_n = an + b.$$

Réciproquement, soient a et b deux nombres réels puis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = an + b.$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = (a(n + 1) + b) - (an + b) = an + a + b - an - b = a.$$

Ainsi, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

Remarque. La suite des entiers naturels (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$) est une suite arithmétique. C'est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1. C'est « la plus simple » de toutes les suites arithmétiques. La suite des entiers pairs (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$) ou la suite des entiers impairs (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$) sont aussi des suites arithmétiques (de raison 2).

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique

On sait que $u_5 = -2$ et $u_9 = -14$. Déterminer u_n en fonction de n .

Solution. Notons r la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On sait que $u_9 = u_5 + (9 - 5)r = u_5 + 4r$ et donc $-14 = -2 + 4r$ puis $4r = -14 + 2$ ou encore $4r = -12$ ou enfin $r = -3$.

On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_5 + (n-5)r = -2 - 3(n-5) = -2 - 3n + 15 = -3n + 13.$$

Pour tout entier naturel n , $u_n = -3n + 13$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}.$$

- 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $1 \leq u_n < 2$.
 2) Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}.$$

- a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
 b) Déterminer v_n en fonction de n .
 c) En déduire u_n en fonction de n .

Solution. 1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $1 \leq u_n < 2$.

- Puisque $u_0 = 1$, la propriété est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que u_n existe et $1 \leq u_n < 2$ et montrons que u_{n+1} existe et $1 \leq u_{n+1} < 2$. Tout d'abord, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ et en particulier $u_n \neq 4$. On en déduit que u_{n+1} existe. Ensuite,

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < 2 &\Rightarrow -3 \leq u_n - 4 < -2 \Rightarrow 2 < 4 - u_n \leq 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{4 - u_n} < \frac{1}{2} \text{ (car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[) \\ &\Rightarrow \frac{4}{3} \leq \frac{4}{4 - u_n} < \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq u_{n+1} < 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2 \text{ (car } \frac{4}{3} \geq 1). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $1 \leq u_n < 2$.

2) a) D'après la question 1), pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n < 2$ et en particulier, pour tout entier naturel n , $u_n \neq 2$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4 - u_n} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4 - u_n} - \frac{2(4 - u_n)}{4 - u_n}} = \frac{1}{\frac{4 - 2(4 - u_n)}{4 - u_n}} = \frac{4 - u_n}{4 - 2(4 - u_n)} \\ &= \frac{4 - u_n}{4 - 8 + 2u_n} = \frac{4 - u_n}{2u_n - 4} = \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)} - \frac{2}{2(u_n - 2)} = \frac{4 - u_n - 2}{2(u_n - 2)} = \frac{2 - u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{-(u_n - 2)}{2(u_n - 2)} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$. Son premier terme est

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $v_0 = -1$ et de raison $r = -\frac{1}{2}$. On sait que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 + nr = -1 + n\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{n}{2} = \frac{-2 - n}{2} = -\frac{n+2}{2}.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n - 2} = v_n &\Rightarrow \frac{1}{u_n - 2} = -\frac{n+2}{2} \Rightarrow u_n - 2 = -\frac{2}{n+2} \Rightarrow u_n = 2 - \frac{2}{n+2} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{2(n+2)}{n+2} - \frac{2}{n+2} \Rightarrow u_n = \frac{2n+4-2}{n+2} \Rightarrow u_n = \frac{2n+2}{n+2}. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

3) Une propriété des suites arithmétiques

Théorème 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique.

1) Pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \text{ ou encore } u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

2) Plus généralement, pour tout entier naturel p et tout entier naturel $n \geq p$,

$$u_{n-p} + u_{n+p} = 2u_n \text{ ou encore } u_n = \frac{u_{n-p} + u_{n+p}}{2}.$$

Démonstration. On note r la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit p un entier naturel puis soit n un entier naturel supérieur ou égal à p . D'après le théorème 1,

$$u_{n+p} = u_n + ((n+p) - n)r = u_n + pr \text{ et } u_{n-p} = u_n + ((n-p) - n)r = u_n - pr.$$

Donc

$$u_{n-p} + u_{n+p} = u_n - pr + u_n + pr = 2u_n,$$

et donc aussi $u_n = \frac{u_{n-p} + u_{n+p}}{2}$. Ceci démontre 2). Le résultat de 1) s'obtient alors en appliquant le résultat de 2) avec $p = 1$.

Commentaire. Le théorème 3 signifie que chaque terme u_n d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit ou plus généralement de deux termes dont les numéros sont symétriques par rapport à n . Par exemple, les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = 3n - 1$, sont

-1 2 5 8 11 14 17 20 23 26 29 32 35

Le nombre 5 est précédé du nombre 2 et est suivi du nombre 8. La moyenne arithmétique de 2 et 8 est effectivement $\frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$. De même, deux rangs avant 23, on trouve 17 et deux rangs après 23, on trouve 29 et la moyenne arithmétique de 17 et 29 est effectivement $\frac{17+29}{2} = \frac{46}{2} = 23$.

Exercice 5. a, b, c, d et e sont cinq entiers qui, dans cet ordre, sont cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On sait que a est le plus petit des cinq entiers.

On sait que la somme de ces cinq nombres est égale à 40 et le produit de ces cinq nombres est égal à 12320.

Déterminer les cinq nombres a, b, c, d et e .

Solution. Notons r la raison de la suite arithmétique.

On sait que $a + b + c + d + e = 40$ ou encore $(a + e) + (b + d) + c = 40$. Mais $a + e = 2c$ et $b + d = 2c$.

On obtient $2c + 2c + c = 40$ ou encore $5c = 40$ ou enfin $c = \frac{40}{5} = 8$.

Le produit $a \times b \times c \times d \times e$ est encore égal à $(c - 2r)(c - r)c(c + r)(c + 2r)$. Par suite,

$$\begin{aligned} abcde = 12320 &\Leftrightarrow (8 - 2r)(8 - r)8(8 + r)(8 + 2r) = 12320 \Leftrightarrow (8 - r)(8 + r)(8 - 2r)(8 + 2r) = \frac{12320}{8} \\ &\Leftrightarrow (64 - r^2)(64 - 4r^2) = 1540 \Leftrightarrow 4(64 - r^2)(16 - r^2) = 1540 \Leftrightarrow (64 - r^2)(16 - r^2) = \frac{1540}{4} \\ &\Leftrightarrow (64 - r^2)(16 - r^2) = 385 \Leftrightarrow 1024 - 16r^2 - 64r^2 + r^4 = 385 \\ &\Leftrightarrow r^4 - 80r^2 + 639 = 0 \Leftrightarrow (r^2)^2 - 80r^2 + 639 = 0. \end{aligned}$$

Le nombre r^2 est donc solution de l'équation (E) : $x^2 - 80x + 639 = 0$. Résolvons cette équation. Son discriminant est

$$\Delta = 80^2 - 4 \times 639 = 6400 - 2556 = 3844 = 62^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions : $x_1 = \frac{80 - 62}{2} = \frac{18}{2} = 9$ et $x_2 = \frac{80 + 62}{2} = \frac{142}{2} = 71$.

Ensuite, le nombre r^2 est solution de (E) si et seulement si $r^2 = 9$ ou $r^2 = 71$ ce qui équivaut à $r \in \{-3, 3, -\sqrt{71}, \sqrt{71}\}$. Puisque $a = c - 2r$ est le plus petit des cinq nombres, on a $r \geq 0$ et donc $r \in \{3, \sqrt{71}\}$. Puisque a est un entier, il ne reste plus que $r = 3$ et donc $a = 2, b = 5, c = 8, d = 11$ et $e = 14$. Réciproquement, ces cinq nombres sont cinq entiers qui sont cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3. Leur somme est égale à 40 et leur produit à 12320.

$$a = 2, b = 5, c = 8, d = 11 \text{ et } e = 14.$$

4) Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème 3. Pour tout entier naturel non nul n ,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque. La notation $1 + 2 + \dots + 10$ est claire. Elle signifie $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$. Mais la notation $1 + 2 + \dots + n$ n'est pas claire pour les premières valeurs de n en particulier quand $n = 3$ ou $n = 2$ ou $n = 1$.

$1 + 2 + \dots + n$ est la somme des n premiers entiers à partir de 1. Donc quand $n = 3$, cette somme est la somme des trois premiers entiers à partir de 1, somme qui commence à 1 et finit à 3 c'est-à-dire $1 + 2 + 3$, quand $n = 2$, cette somme est la somme des deux premiers entiers à partir de 1 qui commence à 1 finit à 2 c'est-à-dire $1 + 2$ et quand $n = 1$, la « somme » ne comporte qu'un seul terme et est donc égale à 1.

Une meilleure notation pour désigner la somme des n premiers entiers est $\sum_{k=1}^n k$. Cette notation est plus abstraite mais est sans ambiguïté quand $n = 3$ ou $n = 2$ ou $n = 1$.

Démonstration 1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

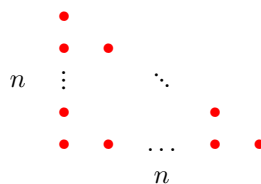
• Puisque $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, la formule est vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

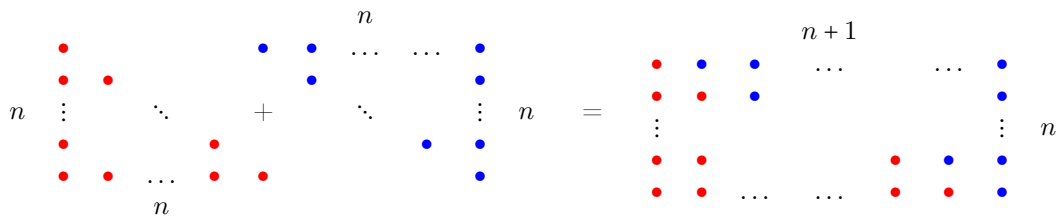
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration 2. Soit n un entier naturel non nul. $1 + 2 + \dots + n$ est le nombre de points du triangle :



Classiquement, un triangle est une moitié de rectangle :



Le nombre total de points du rectangle est $n(n+1)$ et donc le nombre de points du triangle est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration 3. Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_n = 1 + 2 + \dots + n$. On calcule $S_n + S_n$ en regroupant intelligemment les termes :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & k & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & \dots & + & n+1-k & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 2S_n &= S_n + S_n = (1 + 2 + \dots + n) + (n + \dots + 2 + 1) = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \dots + (n+1) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1) \end{aligned}$$

et donc encore une fois $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

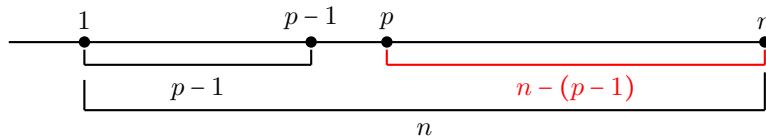
Commentaire 1. Puisque les nombres $\frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont les nombres de points à l'intérieur d'un triangle, ces nombres s'appellent **nombres triangulaires** (de même que les nombres n^2 , $n \in \mathbb{N}^*$, s'appellent les nombres carrés).

Commentaire 2. La démonstration 3 est en fait la même démonstration que la démonstration 2. Vous pouvez visualiser sur le dessin de la démonstration 2 le fait que les sommes $1+n$, $2+(n-1)$, $3+(n-2)$, ... soient toutes égales à $n+1$.

Théorème 4. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.
Il y a $n-p+1$ entiers naturels compris entre p et n , p et n compris.

Démonstration. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

- Il y a n entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. Comme $n-1+1 = n$, le résultat est vrai quand $p = 1$.
- Puisqu'il y a n entiers entiers k tels que $1 \leq k \leq n$, il y a $n+1$ entiers k tels que $0 \leq k \leq n$. Comme $n-0+1 = n+1$, le résultat est également vrai quand $p = 0$.
- Supposons maintenant $p \geq 2$. Il y a $p-1$ entiers k tels que $1 \leq k \leq p-1$ et n entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. Il reste donc $n-(p-1) = n-p+1$ entiers k tels que $p \leq k \leq n$.



Par exemple, entre les entiers 17 et 43, (17 et 43 compris), il y a $43 - 17 + 1 = 27$ entiers.

Théorème 5. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n u_k &= u_p + \dots + u_n = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2} \\ &= \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}. \end{aligned}$$

Démonstration. On généralise la démonstration 3 du théorème 3.

On calcule $2(u_p + \dots + u_n) = (u_p + \dots + u_n) + (u_n + \dots + u_p)$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-p$,

$$u_{p+k} + u_{n-k} = u_p + kr + u_n - kr = u_p + u_n.$$

Ainsi, toutes les sommes $u_p + u_n, u_{p+1} + u_{n-1}, \dots, u_n + u_p$ sont égales $u_p + u_n =$ premier terme + dernier terme.

$$\frac{\begin{array}{cccccccc} u_p & + & u_{p+1} & + & \dots & + & u_{p+k} & + & \dots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ u_n & + & u_{n-1} & + & \dots & + & u_{n-k} & + & \dots & + & u_{p+1} & + & u_p \end{array}}{(u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \dots + (u_p + u_n) + \dots + (u_p + u_n) + (u_p + u_n)}$$

On obtient donc $2(u_p + \dots + u_n) = (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})$ ce qui démontre le résultat.

Exercice 6. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=33}^{67} k = 33 + 34 + 35 + \dots + 66 + 67.$

2) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$

3) $\sum_{k=0}^n (3k + 2), \quad (n \in \mathbb{N}).$

Solution. 1) $33 + 34 + 35 + \dots + 66 + 67 = \frac{(33 + 67) \times (67 - 33 + 1)}{2} = \frac{100 \times 35}{2} = 1750.$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \frac{(1 + 2n - 1) \times n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^n (3k + 2) = \frac{(3 \times 0 + 2 + 3 \times n + 2) \times (n + 1)}{2} = \frac{(3n + 4)(n + 1)}{2}.$

II. Suites géométriques

1) Définition des suites géométriques

Définition 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le nombre q s'appelle alors la **raison** de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque. Le nombre q qui apparaît dans la définition précédente ne dépend pas de n ou encore q est constant quand n varie.

Commentaire. A partir de cette définition, on voit qu'une partie du cours sur les suites géométriques sera obtenu à partir du cours sur les suites arithmétiques en remplaçant mécaniquement le symbole $+$ par le symbole \times .

Dès la définition suivante, les choses s'avèrent plus compliquées que prévues. La différence $u_{n+1} - u_n$ utile pour caractériser les suites arithmétiques va se transformer en le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dans le cours sur les suites géométriques et il n'est pas question que le terme u_n soit égal à 0.

Il n'existe que deux possibilités pour que l'un des termes de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit nul. La première possibilité est que $u_0 = 0$. Dans ce cas, tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nuls. La deuxième possibilité est que $q = 0$. Dans ce cas, tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nuls à partir du rang 1.

Si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$, il est clair par récurrence que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nuls.

Définition 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ne s'annulant pas.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Commentaire. La valeur de cette constante est alors la raison de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 3 \times 2^n.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

Solution. Soit n un entier naturel. $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. Son premier terme est $u_0 = 3$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 3n^2 - 7n + 6.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

Solution. $u_0 = 6$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 4$ puis $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$. En particulier,

$$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

Commentaire. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante si et seulement si pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Donc, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante si et seulement si il existe au moins un entier naturel n tel que $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \neq \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Dans l'exercice précédent, pour montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante, nous avons fourni explicitement un rang n tel que $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \neq \frac{u_{n+1}}{u_n}$, à savoir $n = 0$.

2) Calcul de u_n en fonction de n

Théorème 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

1) Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.

2) Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison non nulle q .

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.

- Puisque $q \neq 0$, $q^0 = 1$ puis $u_0 \times q^0 = u_0$ et donc la formule est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = u_0 \times q^n$ et montrons que $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \times q \text{ (par définition d'une suite géométrique de raison } q) \\ &= u_0 \times q^n \times q \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_0 \times q^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.

2) Soient n et p deux entiers naturels. $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_p = u_0 \times q^p$. Si $u_0 = 0$, on a $u_n = u_p = 0$ puis $u_n = u_p \times q^{n-p}$. Si $u_0 \neq 0$, alors $u_p \neq 0$ (car $q \neq 0$) et on peut écrire

$$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p},$$

puis $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Remarque 1. Dans le théorème 6, on a supposé $q \neq 0$. Ce n'est pas uniquement pour pouvoir écrire $\frac{1}{q}$. C'est aussi à cause de la notation q^n qui n'a aucun sens quand $q = 0$ et $n = 0$ (0^0 ne veut rien dire).

Remarque 2. Dans le théorème précédent, l'ordre dans lequel sont les entiers n et p n'est pas précisé et on a tout à fait le droit d'appliquer la formule du 2) quand $p > n$ (et $q \neq 0$). Par exemple, on a $u_9 = u_6 \times q^{9-6} = u_6 \times q^3$ mais on a aussi $u_7 = u_{11} \times q^{7-11} = \frac{u_{11}}{q^4}$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 3u_n - 4.$$

Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = u_n - 2.$$

- 1) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
- 2) Déterminer v_n en fonction de n .
- 3) En déduire u_n en fonction de n .

Solution. 1) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 3v_n$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3. Son premier terme est

$$v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3.$$

2) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = -3$ et de raison $q = 3$. On sait que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 3^n = -3^{n+1}.$$

3) Soit n un entier naturel. $u_n = v_n + 2 = -3^{n+1} + 2$.

Pour tout entier naturel n , $u_n = -3^{n+1} + 2$.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{3}{4 - u_n}.$$

- 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $1 < u_n < 3$.
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 3}.$$

- a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
- b) Déterminer v_n en fonction de n .
- c) En déduire u_n en fonction de n .

Solution. 1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $1 < u_n < 3$.

- Puisque $u_0 = 2$, la propriété est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que u_n existe et $1 < u_n < 3$ et montrons que u_{n+1} existe et $1 < u_{n+1} < 3$. Tout d'abord, par hypothèse de récurrence, $u_n < 3$ et en particulier $u_n \neq 4$. On en déduit que $4 - u_n \neq 0$ puis que u_{n+1} existe. Ensuite,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3}{4 - u_n} - 1 = \frac{3 - (4 - u_n)}{4 - u_n} = \frac{3 - 4 + u_n}{4 - u_n} = \frac{u_n - 1}{4 - u_n},$$

et

$$u_{n+1} - 3 = \frac{3}{4 - u_n} - 3 = \frac{3 - 3(4 - u_n)}{4 - u_n} = \frac{3(1 - 4 + u_n)}{4 - u_n} = \frac{3(u_n - 3)}{4 - u_n}.$$

Par hypothèse de récurrence, $1 < u_n < 3$. Par suite, $u_n - 1 > 0$ et $4 - u_n > 0$ puis $\frac{u_n - 1}{4 - u_n} > 0$. Ceci fournit $u_{n+1} - 1 > 0$ ou encore $u_{n+1} > 1$.

De même, $u_n - 3 < 0$ et $4 - u_n > 0$ puis $\frac{3(u_n - 3)}{4 - u_n} < 0$. Ceci fournit $u_{n+1} - 3 < 0$ ou encore $u_{n+1} < 3$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $1 < u_n < 3$.

2) a) D'après la question 1), pour tout entier naturel n , $1 < u_n < 3$ et en particulier, pour tout entier naturel n , $u_n \neq 3$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 3} = \frac{\frac{3}{4 - u_n} - 1}{\frac{3}{4 - u_n} - 3} = \frac{\frac{3 - (4 - u_n)}{4 - u_n}}{\frac{3 - 3(4 - u_n)}{4 - u_n}} = \frac{\frac{3 - 4 + u_n}{4 - u_n}}{\frac{3(1 - 4 + u_n)}{4 - u_n}} = \frac{\frac{u_n - 1}{4 - u_n}}{\frac{3(u_n - 3)}{4 - u_n}} \\ &= \frac{u_n - 1}{4 - u_n} \times \frac{4 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 3)} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{3} \times v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Son premier terme est

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 - 3} = \frac{2 - 1}{2 - 3} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = -1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. On sait que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1^n}{3^n} = -\frac{1}{3^n}.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \frac{u_n - 1}{u_n - 3} = v_n &\Rightarrow u_n - 1 = v_n(u_n - 3) \Rightarrow u_n - 1 = u_n v_n - 3v_n \Rightarrow u_n - u_n v_n = 1 - 3v_n \\ &\Rightarrow u_n(1 - v_n) = 1 - 3v_n. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $v_n = -\frac{1}{3^n}$. En particulier, $v_n \neq 1$ ou encore $1 - v_n \neq 0$ puis

$$\begin{aligned} u_n(1 - v_n) = 1 - 3v_n &\Rightarrow u_n = \frac{1 - 3v_n}{1 - v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1 + \frac{3}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}} \Rightarrow u_n = \frac{\frac{3^n + 3}{3^n}}{\frac{3^n + 1}{3^n}} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{3^n + 3}{3^n} \times \frac{3^n}{3^n + 1} \Rightarrow u_n = \frac{3^n + 3}{3^n + 1}. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n + 3}{3^n + 1}$.

Commentaire. Dans la question 2)a), nous avons calculé v_{n+1} et nous sommes parvenu à $\frac{1}{3} \times v_n$. C'est bien meilleur que d'avoir calculé le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ qui obligerait à écrire des superpositions de fractions pour rien :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 3}}{\frac{u_n - 1}{u_n - 3}}$$

et qui accessoirement nous obligerait à vérifier d'abord que $v_n \neq 0$.

Théorème 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ne s'annulant pas.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si il existe deux réels non nuls a et q tels que pour tout entier naturel n , $u_n = a \times q^n$.

Démonstration. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, d'après le théorème 6, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$. Par suite, si on pose $a = u_0$, alors pour tout entier naturel n ,

$$u_n = a \times q^n.$$

De plus, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas, les nombres a et q sont non nuls.

Réciproquement, soient a et q deux réels non nuls puis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = a \times q^n.$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Soit n un entier naturel.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times q^{n+1}}{a \times q^n} = q^{n+1-n} = q.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

3) Une propriété des suites géométriques

Théorème 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique.

1) Pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n-1} \times u_{n+1} = u_n^2.$$

Si de plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, on en déduit que

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}.$$

2) Plus généralement, pour tout entier naturel non nul p et tout entier naturel $n \geq p$,

$$u_{n-p} \times u_{n+p} = u_n^2$$

Si de plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, on en déduit que

$$u_n = \sqrt{u_{n-p} \times u_{n+p}}.$$

Démonstration. Notons q la raison de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1) Soit n un entier naturel non nul. Si $q = 0$, alors $u_n = u_{n-1} \times q = 0$ et $u_{n+1} = u_n \times q = 0$.

Donc $u_{n-1} \times u_{n+1} = 0 = u_n^2$.

Si $q \neq 0$, $u_{n-1} \times u_{n+1} = \frac{u_n}{q} \times q u_n = u_n^2$.

2) Soient p un entier naturel non nul puis n un entier naturel supérieur ou égal à p .

Si $q = 0$, alors $u_n = u_{n-p} \times q^p = 0$ (car $p \geq 1$) et $u_{n+p} = u_n \times q^p = 0$. Donc $u_{n-p} \times u_{n+p} = 0 = u_n^2$.

Si $q \neq 0$, $u_{n-p} \times u_{n+p} = \frac{u_n}{q^p} \times q^p u_n = u_n^2$.

Exercice 11. a , b et c sont trois entiers qui, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

On sait que a est le plus petit des trois entiers.

On sait que la somme de ces trois nombres est égale à 39 et le produit de ces trois nombres est égal à 729.

Déterminer les trois nombres a , b et c .

Solution. Notons q la raison de la suite géométrique.

On sait que $a \times b \times c = 729$ ou encore $(a \times c) \times b = 729$. Comme $a \times c = b^2$, on obtient $b^2 \times b = 729$ ou encore $b^3 = 729$ ou enfin $b = 9$.

La somme $a + b + c$ est encore égale à $\frac{b}{q} + b + bq$ ou encore $9\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned} a + b + c = 39 &\Leftrightarrow 9\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 39 \Leftrightarrow 3\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = \frac{39}{3} \Leftrightarrow 3q + 3 + \frac{3}{q} = 13 \\ &\Leftrightarrow 3q^2 + 3q + 3 = 13q \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $(E) : 3x^2 - 10x + 3 = 0$ est

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64 = 8^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions : $x_1 = \frac{10-8}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{10+8}{2 \times 3} = \frac{18}{6} = 3$.

Si $q = \frac{1}{3}$, on obtient $a = \frac{b}{q} = 3 \times 9 = 27$ et $c = qb = \frac{9}{3} = 3$ et si $q = 3$, on obtient $a = \frac{b}{q} = \frac{9}{3} = 3$ et $c = qb = 3 \times 9 = 27$. Comme a est le plus petit des trois entiers, on a nécessairement $a = 3$, $b = 9$ et $c = 27$.

Réciproquement, ces trois nombres sont trois entiers qui sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3, a étant le plus petit des trois entiers. Leur somme est égale à 39 et leur produit à 729.

$$a = 3, b = 9 \text{ et } c = 27.$$

Commentaire. Le résultat du théorème 8 nous suggérerait de prendre le nombre b comme référence en écrivant : $a = \frac{b}{q}$ et $c = b \times q$ et non pas le nombre a en écrivant : $b = a \times q$ et $c = a \times q^2$.

4) Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème 9. Pour tout nombre réel q et tout entier naturel non nul n ,

$$1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

Démonstration. Soit n un entier naturel. Posons $S = 1 + q + \dots + q^n$.

• Si $q = 1$, $S = \underbrace{1 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n}_{n+1 \text{ termes}} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ termes}} = n + 1$.

• Si $q \neq 1$, $S = 1 + q + \dots + q^n$ et $qS = q + \dots + q^n + q^{n+1}$ et donc $S - qS = 1 - q^{n+1}$.

$$\begin{array}{r} S = 1 + q + \dots + q^n \\ qS = \quad \quad q + \dots + q^n + q^{n+1} \\ \hline S - qS = 1 - q^{n+1} \end{array}$$

Ainsi, $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ et finalement $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ car $q \neq 1$. Enfin, en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par -1 , on obtient aussi $S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Commentaire. On a donné deux écritures de la somme quand $q \neq 1$. On préférera l'écriture $\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ quand q est un réel strictement plus grand que 1 comme $q = 2$ ou $q = 3, 7$.

Théorème 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$.

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + \dots + u_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Puisque $q \neq 1$,

$$\begin{aligned} u_p + \dots + u_n &= u_p + u_p \times q + \dots + u_p \times q^{n-p} \text{ (d'après le théorème 6)} \\ &= u_p (1 + q + \dots + q^{n-p}) \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ (d'après le théorème 9).} \end{aligned}$$

Exercice 12. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=0}^{10} 2^k$.
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{5}{3^k}$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

Solution. 1) $\sum_{k=0}^{10} 2^k = 1 + 2 + \dots + 2^{10} = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2048 - 1 = 2047$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel non nul k , $\frac{5}{3^k} = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{5}{3^k} = \frac{5}{3^1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Exercice 13. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de l'exercice 9, page 9. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_n$, ($n \in \mathbb{N}$).

Solution. Dans l'exercice 9, on a obtenu : pour tout entier naturel n , $u_n = -3^{n+1} + 2$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= (-3^1 + 2) + (-3^2 + 2) + \dots + (-3^{n+1} + 2) = -(3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}) + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n+1 \text{ termes}} \\ &= -3 \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} + 2n + 2 = -\frac{3}{2}(3^{n+1} - 1) + 2n + 2 \\ &= -\frac{3}{2} \times 3^{n+1} + 2n + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^{n+2} + 2n + \frac{7}{2}. \end{aligned}$$
