CONCOURS COMMUN 2010

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

PREMIER PROBLEME

Partie I

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $1 + x > 0$.

$$\boxed{D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.}$$

2) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

En particulier, $f(x) = \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$. On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. On pose aussi $D' = D \cup \{0\} =]-1, +\infty[$ de sorte que f est maintenant définie sur D'.

3) Puisque f admet en 0 un développement limité d'ordre 1, f est dérivable en 0. De plus, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. D'autre part, f est dérivable sur D en tant que quotient de fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D et pour $x \in D$

$$f'(x) = \frac{x \times \dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

Maintenant, f est continue sur D car dérivable sur D et de plus, f est continue en 0. Donc f est continue sur D'. Ensuite, f est de classe C^1 sur D en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. Enfin, quand x tend vers 0,

$$f'(x) = \frac{x(1 - x + o(x)) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

En résumé,
- f est continue sur $D' = D \cup \{0\}$,
- f est de classe C^1 sur D
- f' admet une limite réelle en 0.

D'après un théorème classique d'analyse,

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D'.}$$

4) Pour $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{k(x)}{x^2(1+x)} \text{ où } k(x) = x - (1+x)\ln(1+x).$$

Pour tout réel x de D, $x^2(x+1) > 0$ et donc pour tout réel x de D, $f'(x)$ est du signe de $k(x)$. La fonction k est dérivable sur $D' =]-1, +\infty[$ et pour $x \in D'$, $k'(x) = 1 - \dfrac{x+1}{x+1} - \ln(x+1) = -\ln(x+1)$. La fonction k' est strictement positive sur $]-1, 0[$ et strictement négative sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction k admet en 0 un maximum global strict égal à 0. La fonction k est donc strictement négative sur D et il en est de même de la fonction f'. Comme d'autre part $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, la fonction f' est strictement négative sur D'. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	0

5) a) • $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta) = 0$. Donc la courbe Γ admet une branche spirale de point asymptote le point O.

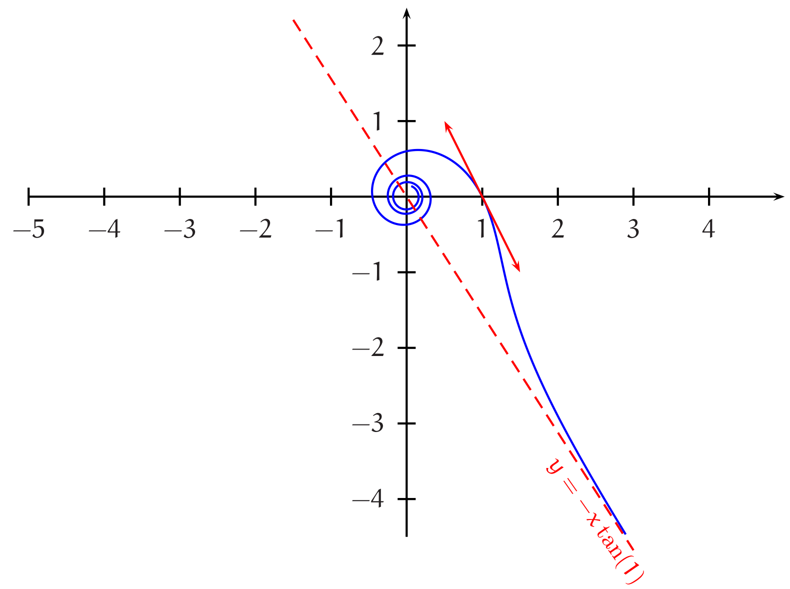
• $f(0) = 1 \neq 0$ et donc le point $M(0)$ est régulier. La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(0) = \rho'(0)\overrightarrow{u_0} + \rho(0)\overrightarrow{v_0} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. La tangente en $M(0)$ est la droite passant par $(1, 0)$ de coefficient directeur -2.

b) Quand θ tend vers -1 par valeurs supérieures, $\rho(\theta)$ tend vers $+\infty$. La courbe Γ admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\theta_0 = -1$. De plus, quand θ tend vers -1 par valeurs supérieures,

$$\rho(\theta)\sin(\theta+1) = \frac{\ln(\theta+1)\sin(\theta+1)}{\theta} \sim -(\theta+1)\ln(\theta+1) \to 0.$$

Puisque $Y(\theta)$ a une limite réelle quand $\theta = -1$ à savoir 0, on sait que la courbe Γ admet une droite asymptote. Une équation de cette droite asymptote est $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v_{\theta_0}} = 0$ ou encore $-\sin(-1)x + \cos(-1)y = 0$ ou enfin $y = -x\tan(1)$.

c) Représentation graphique.



PARTIE II

6) La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc L est bien définie.

7) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Alors $-t \neq 1$ et donc

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}.$$

8) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \int_0^x 1\, dt - \int_0^x t\, dt + \int_0^x t^2\, dt - \ldots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}\, dt \\
&= \int_0^x (1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1})\, dt = \int_0^x \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt \\
&= \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt.}$$

9) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$

$$|R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1+0}\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

10) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$.

$$Q_n'(x) = \frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) = \frac{P_n(x)}{x}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\ Q_n'(x) = \frac{P_n(x)}{x}.}$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $]0,1]$. De plus, d'après les questions 8) et 9), pour $x \in]0,1]$,

$$|g_n(x) - g_n(0)| = |g_n(x)| = \left|\frac{P_n(x) - \ln(1+x)}{x}\right| = \left|-\frac{R_n(x)}{x}\right| = \frac{1}{x}|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n}{n+1} = 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$), on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |g_n(x) - g_n(0)| = 0$. On en déduit que la fonction g_n est continue en 0 et finalement continue sur $[0,1]$.

Maintenant, pour $x \in]0,1]$, $Q_n'(x) - f(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = g_n(x)$ et d'autre part, $Q_n'(0) - f(0) = 1 - 1 = 0 = g_n(0)$. Donc, pour tout réel $x \in [0,1]$, $Q_n'(x) - f(x) = g_n(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|Q_n(1) - L| &= \left|\int_0^1 Q_n'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 g_n(x)\,dx\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} Q_n(1) = L.}$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|Q_n(1) - L| \leqslant 10^{-4} \Leftarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 10^{-4} \Leftarrow \frac{1}{n+1} \leqslant 10^{-2} \Leftarrow n+1 \geqslant 100 \Leftarrow n \geqslant 99.$$

$$\boxed{Q_{99}(1) \text{ est une valeur approchée de } L \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

PARTIE III

13) f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

14) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ et donc pour tout réel $x > 0$

$$f''(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{2}{x^3}\ln(1+x) = \frac{-3x-2}{x^2(x+1)^2} + \frac{2}{x^3}\ln(1+x).$$

15) Démontrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Puisque $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, le résultat est vrai quand $n = 1$ en posant $T_1 = 1$ et $a_1 = -1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'il existe un polynôme T_n et un réel a_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$.

Alors

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{T_n'(x)(1+x)^n x^n - T_n(x)(n(1+x)^{n-1}x^n + n(1+x)^n x^{n-1})}{(1+x)^{2n}x^{2n}} + a_n\frac{1}{(x+1)x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}\\
&= \frac{T_n'(x)(1+x)x - nT_n(x)(x+(1+x))}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} + a_n\frac{1}{(x+1)x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}\\
&= \frac{x(x+1)T_n'(x) - n(2x+1)T_n(x) + a_n(x+1)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}},
\end{aligned}
$$

et donc $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_{n+1}(x)}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} + a_{n+1}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$ où $T_{n+1} = X(X+1)T_n' - n(2X+1)T_n + a_n(X+1)^n$ est un polynôme à coefficients réels et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ est un réel.

Le résultat est démontré par récurrence.

16) Tout d'abord $a_1 = -1$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_{n+1} = -(n+1)a_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (-1)^n n!$.
Ensuite, $T_1 = 1$ est à coefficients entiers et si pour $n \geqslant 1$, T_n est à coefficients entiers alors $X(X+1)T_n' - n(2X+1)T_n + (-1)^n n!(X+1)^n$ est à coefficients entiers.
On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, T_n est à coefficients entiers.

17) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Leibniz permet d'écrire pour tout $x > 0$,

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln(1+x))^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}\\
&= \frac{(-1)\times(-2)\times\ldots\times(-n)}{x^{n+1}}\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)\times(-2)\times\ldots\times(-(k-1))}{(1+x)^k}\frac{(-1)\times(-2)\times\ldots\times(-(n-k))}{x^{n-k+1}}\\
&= (-1)^n n!\frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^n x^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^{k-1}(x+1)^{n-k} + (-1)^n n!\frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}},
\end{aligned}
$$

et on peut prendre $T_n = (-1)^{n-1}n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X^{k-1}(X+1)^{n-k}$.

$$
\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = (-1)^{n-1}n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X^{k-1}(X+1)^{n-k}.}
$$

On retrouve en particulier $T_2 = -2\left[(X+1) + \dfrac{1}{2}X\right] = -3X - 2$.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I

1) ${}^tA = A$ et donc ${}^tAA = A{}^tA = A^2$. La matrice A vérifie la relation (1).
${}^tC = -C$ et donc ${}^tCC = C{}^tC = -C^2$. La matrice C vérifie la relation (1).

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = (A^2)^n = I_2$ et $A^{2n+1} = A^{2n} \times A = A$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \{I_2, A\}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n vérifie la relation (1).

3) $A \times A = I_2$ et donc A est inversible et $A^{-1} = A$.

4) $u\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$ et $u\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i}$. Soit alors s la réflexion par rapport à la droite $D = \text{Vect}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$. Les vecteurs $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ sont non nuls et orthogonaux (dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique). Donc la famille $\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
De plus, $u\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} = s\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et d'autre part, $u\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{i} = -\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) = s\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ car $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \in \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)^{\perp}$.

Ainsi, les endomorphismes u et s coïncident sur une base de $\mathbb{R}^2$ et donc $u = s$.

$$\boxed{u \text{ est la réflexion par rapport à Vect}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right).}$$

5) $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2U$. Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 2^{n-1}U$.

- Le résultat est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $U^n = 2^{n-1}U$. Alors $U^{n+1} = U^nU = 2^{n-1}U \times U = 2^{n-1} \times 2U = 2^{(n+1)-1}U$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U^n = 2^{n-1}U.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. ${}^t(U^n)U^n = \alpha_n^2\, {}^tUU = \alpha_n^2 U^2 = \alpha_n^2 U{}^tU = U^n\, {}^t(U^n)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U^n vérifie la relation (1).

6) On note $E_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ les quatre matrices élémentaires de format 2.
$A + C = 2E_{2,1}$ puis ${}^t(A+C)(A+C) = 4E_{2,1}E_{1,2} = 4E_{2,2}$ et $(A+C){}^t(A+C) = 4E_{1,2}E_{2,1} = 4E_{1,1}$. Donc, ${}^t(A+C)(A+C) \neq (A+C){}^t(A+C)$. Ainsi, les matrices A et C sont dans E_2 mais la matrice $A + C$ n'est pas dans E_2. On en déduit que

$$\boxed{E_2 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).}$$

7) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
${}^tMM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$ et $M{}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$.
Donc

$$M \in E_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c^2 = b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{array}\right. \Leftrightarrow b = c \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} c = -b \\ b(a - d) = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = 0 = c) \text{ ou } (c = -b \text{ et } a = d) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (c = -b \text{ et } a = d)$$

$$\boxed{E_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

8) Ainsi, $E_2 = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1}) \cup \text{Vect}(I, C)$. Maintenant, $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et il est connu que $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$ est une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. D'autre part, la matrice C n'est pas une matrice scalaire et donc (I, C) est une famille libre puis une base de $\text{Vect}(I, C)$.
En résumé, E_2 est la réunion de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ dont une base est $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$ et de $\text{Vect}(I, C)$ dont une base est (I, C).

9) U et C sont dans E_2. Maintenant,

$$UC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En particulier, UC n'est pas dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et d'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $UC - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(C)$ car on ne peut avoir à la fois $1 - \lambda = 0$ et $-1 - \lambda = 0$. En résumé, UC n'est pas dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et UC n'est pas dans $\text{Vect}(I, C)$. Donc, UC n'est pas dans E_2.

$$\boxed{E_2 \text{ n'est pas stable pour le produit matriciel.}}$$

PARTIE II

10) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11) $h^2\left(\overrightarrow{i}\right) = -\overrightarrow{j}$, $h^2\left(\overrightarrow{j}\right) = -\overrightarrow{k}$ et $h^2\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i}$. Donc $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, les colonnes de la matrice S sont unitaires et deux à deux orthogonales. Donc S est une matrice orthogonale puis S^2 est une matrice orthogonale car $(O_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. On en déduit que ${}^tSS = S{}^tS = I_2$ et ${}^tS^2S^2 = S^2{}^tS^2 = I_2$.

$$\boxed{S \text{ et } S^2 \text{ sont dans } E_3.}$$

12) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. En tenant compte de ${}^tSS = S{}^tS = I_3$,

$$\begin{aligned}
{}^t(aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + bS + cS^2) &= (aI_3 + b{}^tS + c{}^tS^2)(aI_3 + bS + cS^2) \\
&= a^2I_3 + abS + acS^2 + ab{}^tS + b^2I_3 + bcS + ac{}^tS^2 + bc{}^tS + c^2I_3 \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ba + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(aI_3 + bS + cS^2){}^t(aI_3 + bS + cS^2) &= (aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + b{}^tS + c{}^tS^2) \\
&= a^2I_3 + ab{}^tS + ac{}^tS^2 + abS + b^2I_3 + bc{}^tS + acS^2 + bcS + c^2I_3 \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ba + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2).
\end{aligned}$$

Donc, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, ${}^t(aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + bS + cS^2) = (aI_3 + bS + cS^2){}^t(aI_3 + bS + cS^2)$ ou encore

$$\boxed{\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ aI_3 + bS + cS^2 \in E_3.}$$

13) Ainsi, E_3 contient $F = \text{Vect}(I, S, S^2)$. Vérifions alors que la famille (I, S, S^2) est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
aI_3 + bS + cS^2 = 0_3 &\Rightarrow a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0.
\end{aligned}$$

Donc la famille (I_3, S, S^2) est libre et on en déduit que $\dim(F) = 3$.

14) $S^3 = S \times S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ puis $S^4 = S \times S^3 = -S$.
Soit alors $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned}
(aI_3 + bS + cS^2)(a'I_3 + b'S + c'S^2) &= aa'I_3 + (ab' + ba')S + (ac' + ca')S^2 + (bc' + cb')S^3 + cc'S^4 \\
&= (aa' - bc' - cb')I_3 + (ab' + ba' - cc')S + (ac' + ca')S^2 \in F.
\end{aligned}$$

$$\boxed{F = \text{Vect}(I_3, S, S^2) \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

PARTIE III

15) $^{t}BB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et

$B^{t}B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Donc $B \in E_4 \Leftrightarrow (a^2+3 = 4$ et $a+1 = 0$ et $a^2+1 = 2$ et $a-1 = -2) \Leftrightarrow a = -1$.

$$\boxed{B \in E_4 \Leftrightarrow a = -1.}$$

16) Si $a = -1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + x_4\overrightarrow{e_4} \in \mathbb{R}^4$.

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) = \left\{x_2(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}),\ x_2 \in \mathbb{R}\right\}$. $\mathrm{Ker}(u)$ est une droite vectorielle et une base de $\mathrm{Ker}(u)$ est $(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 4 - 1 = 3$.
Maintenant, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(u(\overrightarrow{e_1}), u(\overrightarrow{e_2}), u(\overrightarrow{e_3}), u(\overrightarrow{e_4})\right) = \mathrm{Vect}\left(u(\overrightarrow{e_1}), u(\overrightarrow{e_2}), u(\overrightarrow{e_4})\right)$ car $u(\overrightarrow{e_3}) = -u(\overrightarrow{e_2})$.
Comme $\mathrm{card}\left(u(\overrightarrow{e_1}), u(\overrightarrow{e_2}), u(\overrightarrow{e_4})\right) = 3 = \dim(\mathrm{Im}(u))$, la famille $\left(u(\overrightarrow{e_1}), u(\overrightarrow{e_2}), u(\overrightarrow{e_4})\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Ker}(u) \text{ est } (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \text{ et une base de } \mathrm{Im}(u) \text{ est } \left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}, -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right).}$$

17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\boxed{u\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right) = -2\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right).}$$

18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Donc

$$\boxed{u\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}\right) = 2\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}\right) \text{ et } u\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right) = 2\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right).}$$

19) D'après les questions 16), 17) et 18),

$$\boxed{\mathrm{Mat}_C(u) = \mathrm{diag}(0, -2, 2, 2).}$$

Les formules de changement de bases permettent d'écrire $\mathrm{Mat}_{B''}(u) = \mathscr{P}_{B''}^{C} \mathrm{Mat}_C(u) \mathscr{P}_{C}^{B''}$ ou encore $B = P\Delta P^{-1}$ où $P = \mathscr{P}_{B''}^{C}$.

20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B^n = \mathrm{Mat}_{B''}(u^n) = P\mathrm{Mat}_C(u^n)P^{-1} = P\Delta^n P^{-1}$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\Delta^{2p} = \mathrm{diag}(0, (-2)^{2p}, 2^{2p}, 2^{2p}) = 2^{2p-2}\mathrm{diag}(0, 4, 4, 4) = 2^{2p-2}\Delta^2$ et donc $B^{2p} = P\Delta^{2p}P^{-1} = 2^{2p-2}P^{-1}\Delta^2P^{-1} = 2^{2p-2}B^2$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. $\Delta^{2p+1} = \mathrm{diag}(0, (-2)^{2p+1}, 2^{2p+1}, 2^{2p+1}) = 2^{2p}\mathrm{diag}(0, -2, 2, 2) = 2^{2p}\Delta$ et donc $B^{2p+1} = 2^{2p}P^{-1}\Delta P^{-1} = 2^{2p}B$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B^{2p} = 2^{2p-2}B^2 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ B^{2p+1} = 2^{2p}B.}$$

