

PREMIER PROBLEME

Partie I

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $1 + x > 0$.

$$D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$$

2) $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

En particulier, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$. On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. On pose aussi $D' = D \cup \{0\} =]-1, +\infty[$ de sorte que f est maintenant définie sur D' .

3) Puisque f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 , f est dérivable en 0 . De plus, $f'(0) = -\frac{1}{2}$. D'autre part, f est dérivable sur D en tant que quotient de fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D et pour $x \in D$

$$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

Maintenant, f est continue sur D car dérivable sur D et de plus, f est continue en 0 . Donc f est continue sur D' . Ensuite, f est de classe C^1 sur D en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D . Enfin, quand x tend vers 0 ,

$$f'(x) = \frac{x(1-x+o(x)) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

En résumé,

- f est continue sur $D' = D \cup \{0\}$,
- f est de classe C^1 sur D
- f' admet une limite réelle en 0 .

D'après un théorème classique d'analyse,

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D'.$$

4) Pour $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{k(x)}{x^2(1+x)} \text{ où } k(x) = x - (1+x)\ln(1+x).$$

Pour tout réel x de D , $x^2(x+1) > 0$ et donc pour tout réel x de D , $f'(x)$ est du signe de $k(x)$. La fonction k est dérivable sur $D' =]-1, +\infty[$ et pour $x \in D'$, $k'(x) = 1 - \frac{x+1}{x+1} - \ln(x+1) = -\ln(x+1)$. La fonction k' est strictement positive sur $] -1, 0[$ et strictement négative sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction k admet en 0 un maximum global strict égal à 0 . La fonction k est donc strictement négative sur D et il en est de même de la fonction f' . Comme d'autre part $f'(0) = -\frac{1}{2}$, la fonction f' est strictement négative sur D' . On en déduit le tableau de variations de la fonction f .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	0

5) a) • $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} f(\theta) = 0$. Donc la courbe Γ admet une branche spirale de point asymptote le point O .

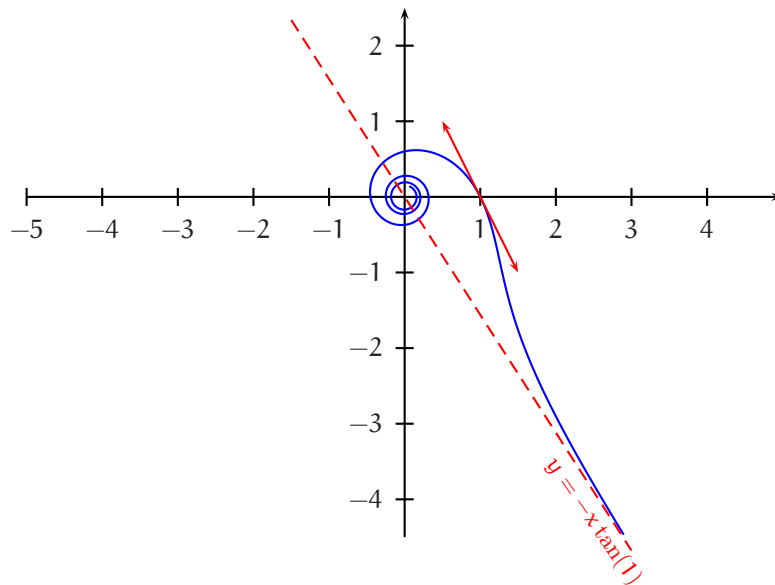
• $f(0) = 1 \neq 0$ et donc le point $M(0)$ est régulier. La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = \rho'(0)\vec{u}_0 + \rho(0)\vec{v}_0 = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$. La tangente en $M(0)$ est la droite passant par $(1, 0)$ de coefficient directeur -2 .

b) Quand θ tend vers -1 par valeurs supérieures, $\rho(\theta)$ tend vers $+\infty$. La courbe Γ admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\theta_0 = -1$. De plus, quand θ tend vers -1 par valeurs supérieures,

$$\rho(\theta) \sin(\theta + 1) = \frac{\ln(\theta + 1) \sin(\theta + 1)}{\theta} \sim -(\theta + 1) \ln(\theta + 1) \rightarrow 0.$$

Puisque $Y(\theta)$ a une limite réelle quand $\theta = -1$ à savoir 0 , on sait que la courbe Γ admet une droite asymptote. Une équation de cette droite asymptote est $\vec{OM} \cdot \vec{v}_{\theta_0} = 0$ ou encore $-\sin(-1)x + \cos(-1)y = 0$ ou enfin $y = -x \tan(1)$.

c) **Représentation graphique.**



PARTIE II

6) La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc L est bien définie.

7) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Alors $-t \neq 1$ et donc

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-1)^n t^n}{1 + t}.$$

8) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \int_0^x 1 \, dt - \int_0^x t \, dt + \int_0^x t^2 \, dt - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} \, dt \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}) \, dt = \int_0^x \frac{1 - (-1)^n t^n}{1 + t} \, dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t} \, dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1 + t} \, dt \\ &= \ln(1 + x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1 + t} \, dt. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], P_n(x) = \ln(1 + x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1 + t} \, dt.$$

9) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+0} dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

10) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$.

$$Q'_n(x) = \frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) = \frac{P_n(x)}{x}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1], Q'_n(x) = \frac{P_n(x)}{x}.$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $]0, 1]$. De plus, d'après les questions 8) et 9), pour $x \in]0, 1]$,

$$|g_n(x) - g_n(0)| = |g_n(x)| = \left| \frac{P_n(x) - \ln(1+x)}{x} \right| = \left| -\frac{R_n(x)}{x} \right| = \frac{1}{x} |R_n(x)| \leq \frac{1}{x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n}{n+1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n+1} = 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$), on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} |g_n(x) - g_n(0)| = 0$. On en déduit que la fonction g_n est continue en 0 et finalement continue sur $[0, 1]$.

Maintenant, pour $x \in]0, 1]$, $Q'_n(x) - f(x) = \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = g_n(x)$ et d'autre part, $Q'_n(0) - f(0) = 1 - 1 = 0 = g_n(0)$. Donc, pour tout réel $x \in [0, 1]$, $Q'_n(x) - f(x) = g_n(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} |Q_n(1) - L| &= \left| \int_0^1 Q'_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 g_n(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1) = L.$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|Q_n(1) - L| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow n+1 \geq 100 \Leftrightarrow n \geq 99.$$

$Q_{99}(1)$ est une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

PARTIE III

13) f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

14) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ et donc pour tout réel $x > 0$

$$f''(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) = \frac{-3x-2}{x^2(x+1)^2} + \frac{2}{x^3} \ln(1+x).$$

15) Démontrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

• Puisque $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$, le résultat est vrai quand $n = 1$ en posant $T_1 = 1$ et $a_1 = -1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons qu'il existe un polynôme T_n et un réel a_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$.

Alors

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{T'_n(x)(1+x)^n x^n - T_n(x)(n(1+x)^{n-1} x^n + n(1+x)^n x^{n-1})}{(1+x)^{2n} x^{2n}} + a_n \frac{1}{(x+1)x^{n+1}} - (n+1)a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}} \\
&= \frac{T'_n(x)(1+x)x - nT_n(x)(x+(1+x))}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} + a_n \frac{1}{(x+1)x^{n+1}} - (n+1)a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}} \\
&= \frac{x(x+1)T'_n(x) - n(2x+1)T_n(x) + a_n(x+1)^n}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} - (n+1)a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}},
\end{aligned}$$

et donc $f^{(n+1)}(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} + a_{n+1} \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$ où $T_{n+1} = X(X+1)T'_n - n(2X+1)T_n + a_n(X+1)^n$ est un polynôme à coefficients réels et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ est un réel.

Le résultat est démontré par récurrence.

16) Tout d'abord $a_1 = -1$ et $\forall n \geq 1, a_{n+1} = -(n+1)a_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = (-1)^n n!$.

Ensuite, $T_1 = 1$ est à coefficients entiers et si pour $n \geq 1, T_n$ est à coefficients entiers alors $X(X+1)T'_n - n(2X+1)T_n + (-1)^n n!(X+1)^n$ est à coefficients entiers.

On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 1, T_n$ est à coefficients entiers.

17) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de LEIBNIZ permet d'écrire pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\ln(1+x))^{(k)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} \ln(1+x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\
&= \frac{(-1) \times (-2) \times \dots \times (-n)}{x^{n+1}} \ln(1+x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1) \times (-2) \times \dots \times (-(k-1))}{(1+x)^k} \frac{(-1) \times (-2) \times \dots \times (-(n-k))}{x^{n-k+1}} \\
&= (-1)^n n! \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1} n!}{(1+x)^n x^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^{k-1} (x+1)^{n-k} + (-1)^n n! \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}},
\end{aligned}$$

et on peut prendre $T_n = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} X^{k-1} (X+1)^{n-k}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} X^{k-1} (X+1)^{n-k}.$$

On retrouve en particulier $T_2 = -2 \left[(X+1) + \frac{1}{2}X \right] = -3X - 2$.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I

1) ${}^tA = A$ et donc ${}^tAA = A^tA = A^2$. La matrice A vérifie la relation (1).

${}^tC = -C$ et donc ${}^tCC = C^tC = -C^2$. La matrice C vérifie la relation (1).

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = (A^2)^n = I_2$ et $A^{2n+1} = A^{2n} \times A = A$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \{I_2, A\}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n vérifie la relation (1).

3) $A \times A = I_2$ et donc A est inversible et $A^{-1} = A$.

4) $u(\vec{i}) = \vec{j}$ et $u(\vec{j}) = \vec{i}$. Soit alors s la réflexion par rapport à la droite $D = \text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$. Les vecteurs $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j}$ sont non nuls et orthogonaux (dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique). Donc la famille $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^2 .

De plus, $u(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{j} + \vec{i} = \vec{i} + \vec{j} = s(\vec{i} + \vec{j})$ et d'autre part, $u(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{j} - \vec{i} = -(\vec{i} - \vec{j}) = s(\vec{i} - \vec{j})$ car $\vec{i} - \vec{j} \in (\vec{i} + \vec{j})^\perp$.

Ainsi, les endomorphismes u et s coïncident sur une base de \mathbb{R}^2 et donc $u = s$.

u est la réflexion par rapport à $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.

5) $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2U$. Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 2^{n-1}U$.

• Le résultat est vrai quand $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $U^n = 2^{n-1}U$. Alors $U^{n+1} = U^n U = 2^{n-1}U \times U = 2^{n-1} \times 2U = 2^{(n+1)-1}U$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 2^{n-1}U$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. ${}^t(U^n)U^n = \alpha_n^2 {}^tUU = \alpha_n^2 U^2 = \alpha_n^2 U^tU = U^{n^t}(U^n)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U^n vérifie la relation (1).

6) On note $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$ les quatre matrices élémentaires de format 2.

$A + C = 2E_{2,1}$ puis ${}^t(A + C)(A + C) = 4E_{2,1}E_{1,2} = 4E_{2,2}$ et $(A + C)({}^t(A + C)) = 4E_{1,2}E_{2,1} = 4E_{1,1}$. Donc, ${}^t(A + C)(A + C) \neq (A + C)({}^t(A + C))$. Ainsi, les matrices A et C sont dans E_2 mais la matrice $A + C$ n'est pas dans E_2 . On en déduit que

E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

7) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

${}^tMM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$ et $M{}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$.

Donc

$$M \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases} \Leftrightarrow b = c \text{ ou } \begin{cases} c = -b \\ b(a - d) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = 0 = c) \text{ ou } (c = -b \text{ et } a = d) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (c = -b \text{ et } a = d)$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

8) Ainsi, $E_2 = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1}) \cup \text{Vect}(I, C)$. Maintenant, $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et il est connu que $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. D'autre part, la matrice C n'est pas une matrice scalaire et donc (I, C) est une famille libre puis une base de $\text{Vect}(I, C)$.

En résumé, E_2 est la réunion de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ dont une base est $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$ et de $\text{Vect}(I, C)$ dont une base est (I, C) .

9) U et C sont dans E_2 . Maintenant,

$$UC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En particulier, UC n'est pas dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et d'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $UC - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(C)$ car on ne peut avoir à la fois $1-\lambda = 0$ et $-1-\lambda = 0$. En résumé, UC n'est pas dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et UC n'est pas dans $\text{Vect}(I, C)$. Donc, UC n'est pas dans E_2 .

E_2 n'est pas stable pour le produit matriciel.

PARTIE II

10) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11) $h^2(\vec{i}) = -\vec{j}$, $h^2(\vec{j}) = -\vec{k}$ et $h^2(\vec{k}) = \vec{i}$. Donc $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, les colonnes de la matrice S

sont unitaires et deux à deux orthogonales. Donc S est une matrice orthogonale puis S^2 est une matrice orthogonale car $(O_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. On en déduit que ${}^tSS = S^tS = I_2$ et ${}^tS^2S^2 = S^2{}^tS^2 = I_2$.

S et S^2 sont dans E_3 .

12) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. En tenant compte de ${}^tSS = S^tS = I_3$,

$$\begin{aligned} {}^t(aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + bS + cS^2) &= (aI_3 + b{}^tS + c{}^tS^2)(aI_3 + bS + cS^2) \\ &= a^2I_3 + abS + acS^2 + ab{}^tS + b^2I_3 + bcS + ac{}^tS^2 + bc{}^tS + c^2I_3 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ba + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (aI_3 + bS + cS^2)({}^t(aI_3 + bS + cS^2)) &= (aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + b{}^tS + c{}^tS^2) \\ &= a^2I_3 + ab{}^tS + ac{}^tS^2 + abS + b^2I_3 + bc{}^tS + acS^2 + bcS + c^2I_3 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ba + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2). \end{aligned}$$

Donc, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, ${}^t(aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + bS + cS^2) = (aI_3 + bS + cS^2)({}^t(aI_3 + bS + cS^2))$ ou encore

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $aI_3 + bS + cS^2 \in E_3$.

13) Ainsi, E_3 contient $F = \text{Vect}(I, S, S^2)$. Vérifions alors que la famille (I, S, S^2) est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} aI_3 + bS + cS^2 = 0_3 &\Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc la famille (I_3, S, S^2) est libre et on en déduit que $\dim(F) = 3$.

14) $S^3 = S \times S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ puis $S^4 = S \times S^3 = -S$.

Soit alors $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned} (aI_3 + bS + cS^2)(a'I_3 + b'S + c'S^2) &= aa'I_3 + (ab' + ba')S + (ac' + ca')S^2 + (bc' + cb')S^3 + cc'S^4 \\ &= (aa' - bc' - cb')I_3 + (ab' + ba' - cc')S + (ac' + ca')S^2 \in F. \end{aligned}$$

$F = \text{Vect}(I_3, S, S^2)$ est stable pour le produit matriciel.

PARTIE III

$$15) {}^t\text{BB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\text{B}^t\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{B} \in \text{E}_4 \Leftrightarrow (a^2 + 3 = 4 \text{ et } a + 1 = 0 \text{ et } a^2 + 1 = 2 \text{ et } a - 1 = -2) \Leftrightarrow a = -1$.

$$\boxed{\text{B} \in \text{E}_4 \Leftrightarrow a = -1.}$$

16) Si $a = -1$, $\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 \in \mathbb{R}^4$.

$$\vec{x} \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Ainsi, $\text{Ker}(u) = \{x_2(\vec{e}_2 + \vec{e}_3), x_2 \in \mathbb{R}\}$. $\text{Ker}(u)$ est une droite vectorielle et une base de $\text{Ker}(u)$ est $(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(u)) = 4 - 1 = 3$.

Maintenant, $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4)) = \text{Vect}(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_4))$ car $u(\vec{e}_3) = -u(\vec{e}_2)$.

Comme $\text{card}(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_4)) = 3 = \dim(\text{Im}(u))$, la famille $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_4))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \text{Ker}(u) \text{ est } (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \text{ et une base de } \text{Im}(u) \text{ est } (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, -\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4).}$$

17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\boxed{u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = -2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4).}$$

18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc

$$\boxed{u(\vec{e}_1 + \vec{e}_4) = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_4) \text{ et } u(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = 2(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4).}$$

19) D'après les questions 16), 17) et 18),

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathbb{C}}(u) = \text{diag}(0, -2, 2, 2).}$$

Les formules de changement de bases permettent d'écrire $\text{Mat}_{\text{B}''}(u) = \mathcal{P}_{\text{B}''}^{\mathbb{C}} \text{Mat}_{\mathbb{C}}(u) \mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\text{B}''}$ ou encore $\text{B} = \text{P}\Delta\text{P}^{-1}$ où $\text{P} = \mathcal{P}_{\text{B}''}^{\mathbb{C}}$.

20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\text{B}^n = \text{Mat}_{\text{B}''}(u^n) = \text{P}\text{Mat}_{\mathbb{C}}(u^n)\text{P}^{-1} = \text{P}\Delta^n\text{P}^{-1}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\Delta^{2p} = \text{diag}(0, (-2)^{2p}, 2^{2p}, 2^{2p}) = 2^{2p-2}\text{diag}(0, 4, 4, 4) = 2^{2p-2}\Delta^2$ et donc $\text{B}^{2p} = \text{P}\Delta^{2p}\text{P}^{-1} = 2^{2p-2}\text{P}\Delta^2\text{P}^{-1} = 2^{2p-2}\text{B}^2$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. $\Delta^{2p+1} = \text{diag}(0, (-2)^{2p+1}, 2^{2p+1}, 2^{2p+1}) = 2^{2p}\text{diag}(0, -2, 2, 2) = 2^{2p}\Delta$ et donc $\text{B}^{2p+1} = 2^{2p}\text{P}\Delta\text{P}^{-1} = 2^{2p}\text{B}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \text{B}^{2p} = 2^{2p-2}\text{B}^2 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, \text{B}^{2p+1} = 2^{2p}\text{B}.}$$