CONCOURS COMMUN 2009

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(spécifique MPSI)

Problème 1.

I Etude d'une fonction

1. • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout réel x,

$$f'(x) = 3(1-2x^2)e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$ et donc la fonction f' est strictement négative sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ et strictement positive sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Par suite, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{e^{x^2}} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. La droite d'équation $y = -1$ est donc asymptote à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.

• **Tableau de variations de f.**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\pm\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{e}}$	$\searrow$	-1

2. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 3(-4x + (1-2x^2)(-2x))e^{-x^2} = 3(4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 6x(2x^2-3)e^{-x^2}.$$

f'' s'annule en changeant de signe en 0 et donc le point de C_f d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

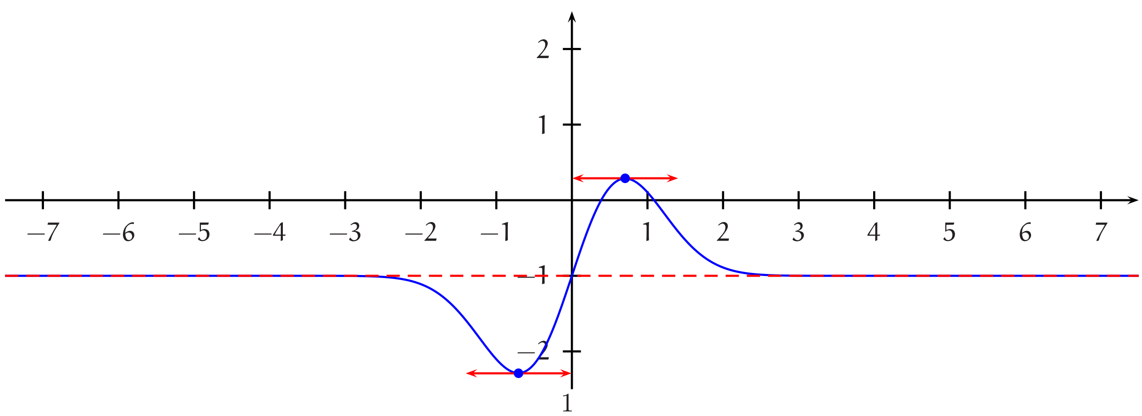
3. Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$ ou encore $y = 3x - 1$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - (3x-1) = 3x(e^{-x^2} - 1).$$

Pour $x \neq 0$, on a $3(e^{-x^2} - 1) < 0$ et donc $f(x) - (3x-1)$ est du signe de x. On en déduit que C_f est strictement au-dessus de sa tangente en 0 sur $]0, +\infty[$ et strictement au-dessous sur $]-\infty, 0[$. On retrouve ainsi le fait que

$$\boxed{\text{le point } (0, -1) \text{ est un point d'inflexion de } C_f.}$$

4. Graphe de f.



5. a) f est indéfiniment dérivable en 0 et en particulier, f admet un développement limité à tout ordre en 0, son développement de TAYLOR-YOUNG.

b) Quand x tend vers 0,

$$f(x) = -1 + 3x\left(1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4)\right) = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3x^5}{2} + o(x^5).$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3x^5}{2} + o(x^5).}$$

II Etude d'une équation différentielle

6. et 7. Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Sur I, l'équation (E_n) s'écrit $y' + \left(-\frac{n}{x} + 2x\right)y = \frac{n}{x} - 2x$. Comme les deux fonctions $x \mapsto -\frac{n}{x} + 2x$ et $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sont continues sur I, les solutions de (E_n) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1 et de direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée notée $(E_{n,h})$.

Soit f une fonction dérivable sur I. Pour $x \in I$, posons $a(x) = -\frac{n}{x} + 2x$. Une primitive sur I de la fonction a, continue sur I, est la fonction $A\ :\ x \mapsto -n\ln|x| + x^2$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E_{n,h}) \text{ sur I} &\Leftrightarrow f' + af = 0 \Leftrightarrow e^A f' + ae^A f = 0 \Leftrightarrow (e^A f)' = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ e^{A(x)}f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{-A(x)}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{n\ln|x| - x^2} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = C|x|^n e^{-x^2}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = Cx^n e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

En notant $\mathscr{S}_{n,I,h}$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation $(E_{n,h})$, on a

$$\boxed{\mathscr{S}_{n,I,h} = \left\{x \mapsto Cx^n e^{-x^2},\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Comme la fonction $x \mapsto -1$ est solution de (E_n) sur I, on en déduit encore que

$$\boxed{\mathscr{S}_{n,I} = \left\{x \mapsto -1 + Cx^n e^{-x^2},\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

8. Soit f une éventuelle solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, les restrictions de f à $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, sont solutions de (E_n) sur ces intervalles et f vérifie encore l'égalité (E_n) quand $x = 0$.

Donc $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1 + C_1x^n e^{-x^2} \text{ si } x < 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \\ -1 + C_2x^n e^{-x^2} \text{ si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 + C_1x^n e^{-x^2} \text{ si } x < 0 \\ -1 + C_2x^n e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}\quad (*)$.

Réciproquement, une telle fonction est solution de (E_n) sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$ et, si elle est dérivable en 0, vérifie encore l'égalité (E_n) pour $x = 0$. En résumé, une telle fonction est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

1er cas. Supposons $n \geqslant 2$. Pour tout choix de C_1 et C_2, $f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + o(x)$. Dans ce cas, f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 et est donc dérivable en 0. On en déduit que toute fonction du type $(*)$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Il reste à étudier si les solutions obtenues sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. De plus, $f'(0) = 0$ (d'après le développement limité ci-dessus) et pour $x < 0$, $f'(x) = C_1(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2}$. Puisque $n - 1 \geqslant 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0 = f'(0)$ ce qui montre que f' est continue à gauche en 0 et donc que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2ème cas. Supposons $n = 1$. On a $f(x) \underset{x\to 0,\ x<0}{=} -1 + C_1x + o(x)$ et $f(x) \underset{x\to 0,\ x\geqslant 0}{=} -1 + C_2x + o(x)$. Donc, f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 si et seulement si $C_1 = C_2$. Dans ce cas, les solutions sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto -1 + Cxe^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Toutes ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}} = \{x \mapsto -1 + Cxe^{-x^2},\ C \in \mathbb{R}\} \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ \mathscr{S}_{n,\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \begin{cases} -1 + C_1x^n e^{-x^2} \text{ si } x < 0 \\ -1 + C_2x^n e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}. \\ \text{Dans les deux cas, les solutions obtenues sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

III Etude de deux suites

9. $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 > 0$.

10. f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = 3(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$. La fonction f_n' est strictement positive sur $\left]0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right[$ et strictement négative sur $\left]\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$ et par suite, la fonction f_n est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$.
Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$.

Puisque la fonction f_n est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$, la fonction f_n s'annule au plus une fois dans chacun de ces deux intervalles.
Puisque $f_n(0) \times f_n(1) < 0$ et que f_n est continue sur $[0, 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction f_n s'annule au moins une fois sur $[0, 1] \subset \left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ (car $n \geqslant 2$) et donc exactement une fois sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ en un certain réel u_n vérifiant $0 < u_n < 1$.
De plus, f étant strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, on a $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$. Mais alors, $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) < 0$ et f_n s'annule aussi au moins une fois et donc exactement une fois sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$ en un certain réel v_n vérifiant $1 \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2}} < v_n$.

En résumé, la fonction f_n s'annule exactement deux fois sur $[0, +\infty[$ en deux réels u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

11. Puisque $\forall n \geqslant 2$, $v_n \geqslant \dfrac{n}{2}$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.}$$

12. a) Soit $n \geqslant 2$. $f_n(u_n) = 0 \Rightarrow 3u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$.

b) Soit $n \geqslant 2$. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = \dfrac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1 < 0$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $f_{n+1}(u_n) < 0$.

c) Ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $u_n < u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \geqslant 2} \text{ est strictement croissante.}}$$

d) Puisque la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée par 1, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un certain réel ℓ. Puisque de plus $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < 1$, par passage à la limite on obtient $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

13. a) Soit $t > 0$.

$$f_n(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2} = 1 \Leftrightarrow \ln(3t^n e^{-t^2}) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln 3 + n \ln t - t^2 = 0 \Leftrightarrow g_n(t) = 0.$$

b) Puisque $\forall n \geqslant 2$, $u_n > 0$, d'après a) on a $\forall n \geqslant 2$, $\ln 3 + n \ln(u_n) - u_n^2 = 0$. Dans tous les cas, le membre de droite de cette égalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Maintenant, si $\ell \in [0, 1[$, le membre de gauche de l'égalité tend vers $-\infty$ que $\ell = 0$ ou $\ell \in]0, 1[$. Ceci est une contradiction et donc $\ell = 1$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$

c) Puisque u_n tend vers 1, $w_n = u_n - 1$ tend vers 0. Mais alors

$$0 = g_n(u_n) = \ln 3 + n \ln(1 + w_n) - w_n^2 \underset{n \to +\infty}{=} \ln 3 + n \ln(1 + w_n) + o(1)$$

et donc $\ln(1 + w_n) \underset{n \to +\infty}{=} -\dfrac{\ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $\ln(1 + w_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n$ et que $-\dfrac{\ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 3}{n}$, on en déduit que $w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 3}{n}$.

$$\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 3}{n} \text{ ou encore } u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

IV. Etude d'une courbe paramétrée.

14. a) • Variations conjointes de x et y.

La fonction x est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $t>0$, $x'(t)=\frac{2}{t}-2t=\frac{2(1+t)(1-t)}{t}$. De même, la fonction y est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $t>0$, $y'(t)=1-t^2=(1-t)(1+t)$. Pour $t>0$, $x'(t)$ et $y'(t)$ sont du signe de $1-t$ et donc les fonctions x' et y'sont strictement positives sur $]0,1[$ et strictement négatives sur $]1,+\infty[$. On en déduit que les fonctions x et y sont strictement croissantes sur $]0,1]$ et strictement décroissantes sur $[1,+\infty[$.

• $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=-\infty$.

b) Etude quand t tend vers 0. $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=0$. Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote au support de la courbe M quand t tend vers 0. De plus, $y(t)-0=y(t)=\frac{t(\sqrt{3}+t)}{3}(\sqrt{3}-t)$. Par suite, $y(t)$ est du signe de $\sqrt{3}-t$ sur $]0,+\infty[$. On en déduit que $M(t)$ est strictement au-dessus de (Ox) quand t décrit $]-\infty,\sqrt{3}[$ et strictement au-dessous quand t décrit $]\sqrt{3},+\infty[$. Enfin, $M(t)$ appartient à (Ox) pour $t=\sqrt{3}$ et de plus $M(\sqrt{3})$ a pour coordonnées $(2\ln 3-3,0)$.

c) $x'(1)=y'(1)=0$ et donc le point $M(1)$ est un point singulier. Effectuons un développement limité simultané des deux fonctions x et y en 1. Pour cela, posons $h=t-1$ ou encore $t=1+h$ de sorte que t tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$M(1+h)=\begin{pmatrix}\ln 3+2\ln(1+h)-(1+h)^2\\(1+h)-\frac{1}{3}(1+h)^3\end{pmatrix}\underset{h\to 0}{=}\begin{pmatrix}-1+\ln 3-2h^2+o(h^2)\\\frac{2}{3}-h^2+o(h^2)\end{pmatrix}$$
$$\underset{h\to 0}{=}\begin{pmatrix}-1+\ln 3\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}+h^2\begin{pmatrix}-2+o(1)\\-1+o(1)\end{pmatrix}=M(1)+h^2\begin{pmatrix}-2+o(1)\\-1+o(1)\end{pmatrix}.$$

Pour $h\neq 0$ suffisamment petit, le vecteur $-\frac{1}{h^2}\overrightarrow{M(1)M(1+h)}$ dirige la droite $(M(1)M(1+h))$ et tend vers le vecteur de coordonnées $(2,1)$ quand h tend vers 0. On en déduit que la courbe M admet une tangente (T) au point $M(1)$ dirigée par le vecteur de coordonnées $(2,1)$. Puisque x change de sens de variation en $t=1$, le point $M(1)$ est un point de rebroussement. Il reste à étudier localement la position relative de la courbe M par rapport à sa tangente (T).

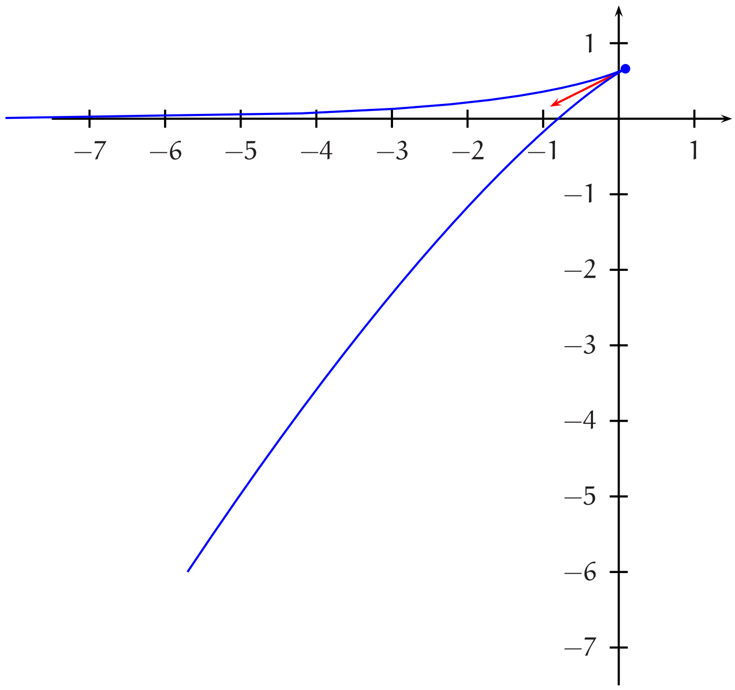
Une équation de (T) est $y=\frac{1}{2}(x+1-\ln 3)+\frac{2}{3}$ ou encore $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 3$. Puis

$$y(1+h)-\left(\frac{1}{2}x(1+h)+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 3\right)=(1+h)-\frac{1}{3}(1+h)^3-\left(\frac{1}{2}\ln 3+\ln(1+h)-\frac{1}{2}(1+h)^2+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 3\right)$$
$$\underset{h\to 0}{=}-\frac{2h^3}{3}+o(h^3).$$

Ainsi, pour h petit, $y(1+h)-\left(\frac{1}{2}x(1+h)+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 3\right)$ est du signe de h^3 et donc change de signe en 0. On en déduit que le support de la courbe M est de part et d'autre de sa tangente et donc que

$$\boxed{\text{le point } M(1) \text{ est un point de rebroussement de première espèce.}}$$

15. Construction du support de la courbe M. Voir page suivante.


1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7

Problème 2.

I. Étude d'un polynôme

16. a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On sait que

$$(x+iy)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ \text{sgn}(xy) = \text{sgn}(4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, 2) \text{ ou } (x, y) = (-1, -2).$$

Les racines carrées de $-3+4i$ dans $\mathbb{C}$ sont $1+2i$ et $-1-2i$.

b) Le discriminant du trinôme U est $\Delta = (1-2i)^2 - 4(-2i) = -3+4i = (1+2i)^2$. U admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \dfrac{-(1-2i)+(1+2i)}{2} = 2i$ et $z_2 = \dfrac{-(1-2i)-(1+2i)}{2} = -1$.

Les racines de U dans $\mathbb{C}$ sont $2i$ et -1.

17. a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$U(x+iy) = (x+iy)^2 + (1-2i)(x+iy) - 2i = (x^2 - y^2 + x + 2y) + i(2xy - 2x + y - 2).$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Re}\,(U(x+iy)) = x^2 - y^2 + x + 2y$ et $\text{Im}\,(U(x+iy)) = 2xy - 2x + y - 2$.

b) i)

$$M(x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \text{Re}(U(x+iy)) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y-1)^2 = -\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Γ_1 est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. De plus, avec les notations usuelles, $a = b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et enfin $e = \dfrac{c}{b}$ (car l'axe focal est (Ωy) ou encore $e = \sqrt{2}$.

Γ_1 est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ et d'excentricité $e = \sqrt{2}$.

Tracé de Γ_1. (Voir page suivante).

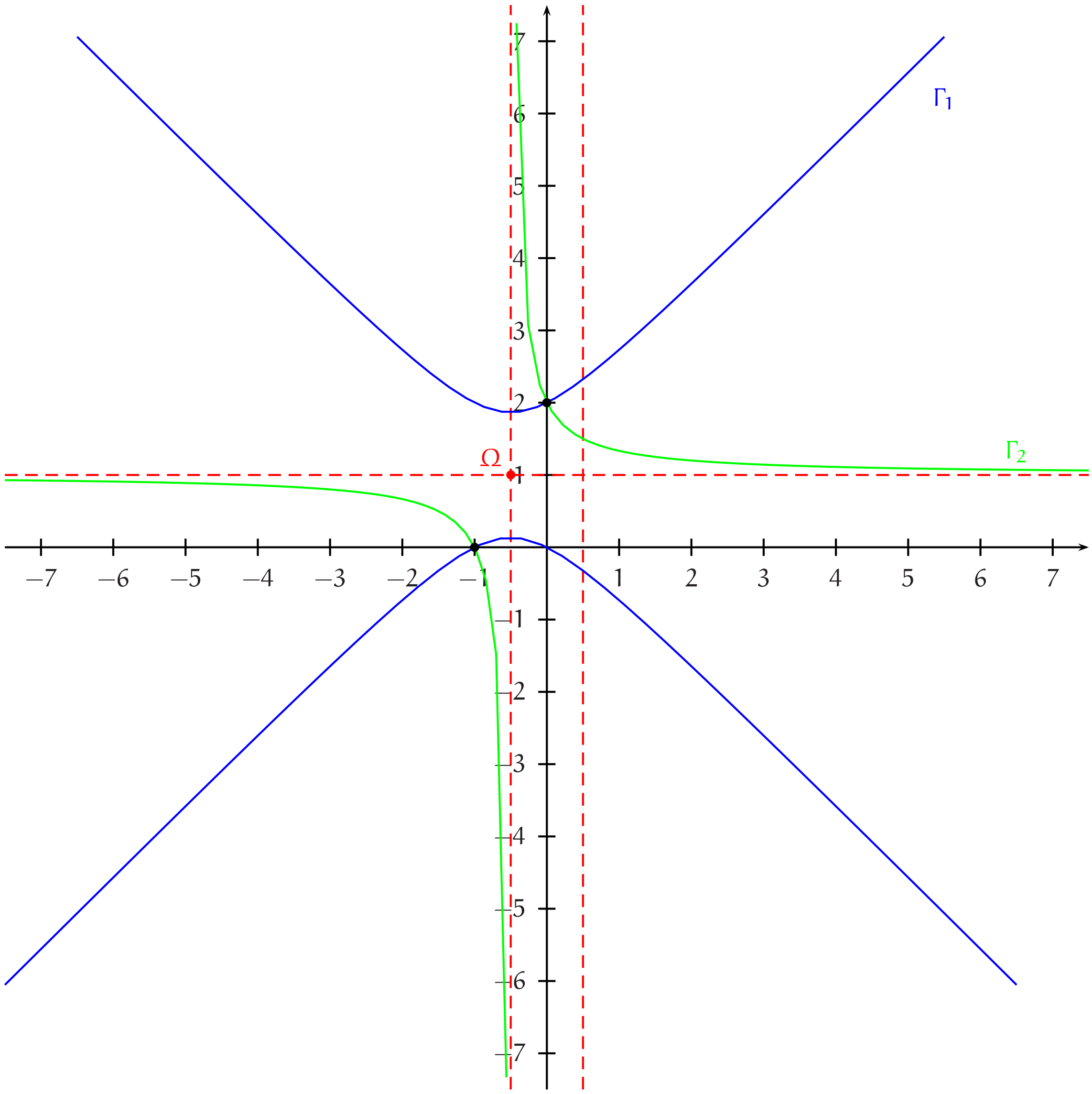
ii)

$$M(x, y) \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \text{Im}(U(x+iy)) = 0 \Leftrightarrow 2xy - 2x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2x+2}{2x+1} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{2x+1}.$$

Γ_2 est le graphe de la fonction homographique $x \mapsto \dfrac{2x+2}{2x+1}$. Γ_2 est donc une hyperbole. Son centre est le point d'intersection des deux asymptotes c'est-à-dire le point Ω.

Γ_2 est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Remarque. $M \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \Leftrightarrow U(x+iy) = 0 \Leftrightarrow x + iy \in \{-1, 2i\}$.



II. Définition d'une application

18. Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{C}[X])^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. Notons Q_1 et R_1 (resp. Q_2 et R_2) le quotient et le reste de la division euclidienne de $P_1(X^2)$ (resp. $P_2(X^2)$) par T. Par définition

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X^2) = \lambda_1(Q_1 T + R_1) + \lambda_2(Q_2 T + R_2) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)T + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2),$$

et puisque $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(T)$, les polynômes $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ et $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X^2)$ par le polynôme T. Mais alors

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + X(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) = \lambda_1(Q_1 + XR_1) + \lambda_2(Q_2 + XR_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}[X]).}$$

19. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $P(X^2) = QT + R$ avec $\deg(R) < \deg(T) = n$. Alors

$$\deg(QT) = \deg(P(X^2) - R) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(P(X^2)), \deg(R)) \leqslant 2n$$

et donc $\deg(Q) = \deg(QT) - n \leqslant 2n - n = n$. Par suite, $Q \in \mathbb{C}_n[X]$. Mais on a aussi $\deg(XR) = 1 + \deg(R) \leqslant 1 + n - 1 = n$ et donc $XR \in \mathbb{C}_n[X]$. Finalement, $f(P) = Q + XR$ est dans $\mathbb{C}_n[X]$. f_n est donc bien une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même et puisque f_n est linéaire, on a montré que

$$\boxed{f_n \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X]).}$$

20. a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, posons $P_k = X^k$ puis notons Q_k et R_k le quotient et le reste de la division euclidienne de $P_k(X^2)$ par $T = X^2$.

• $P_0(X^2) = 1 = 0 \times X^2 + 1$ et donc $Q_0 = 0$ et $R_0 = 1$ puis $f_2(P_0) = 0 + X \times 1 = X = P_1$.
• $P_1(X^2) = X^2 = 1 \times X^2 + 0$ et donc $Q_1 = 1$ et $R_1 = 0$ puis $f_2(P_1) = 1 + X \times 0 = 1 = P_0$.
• $P_2(X^2) = X^4 = X^2 \times X^2 + 0$ et donc $Q_2 = X^2$ et $R_2 = 0$ puis $f_2(P_2) = X^2 + X \times 0 = X^2 = P_2$.

On en déduit que

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ ou encore $f_2^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, f_2 est une involution de $\mathbb{C}_2[X]$ et en particulier un automorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ de réciproque $f_2^{-1} = f_2$. On sait alors que f_2 est une symétrie vectorielle.

$$\boxed{f_2 \text{ est une symétrie vectorielle.}}$$

21. Puisque $(1+i)^2 = 2i$ et $i^2 = -1$, les racines du polynôme $U(X^2)$ sont $1+i$, $-1-i$, i et $-i$. Par suite, $U(X^2) = (X+1+i)(X-i)(X-1-i)(X+i) = T(-X)T(X) + 0$. On en déduit que $f(P) = T(-X) + X \times 0 = T(-X)$.

$$\boxed{f(U) = T(-X) = (X+1+i)(X-i).}$$

III Etude d'un cas particulier

22. Pour $k \in [\![0,3]\!]$, posons $P_k = X^k$ puis notons Q_k et R_k le quotient et le reste de la division euclidienne de $P_k(X^2)$ par $T = X^3 + X^2 + a$.
• $P_0(X^2) = 1 = 0 \times (X^3 + X^2 + a) + 1$ et donc $Q_0 = 0$ et $R_0 = 1$ puis $f_3(P_0) = 0 + X \times 1 = X = P_1$.
• $P_1(X^2) = X^2 = 0 \times (X^3 + X^2 + a) + X^2$ et donc $Q_1 = 0$ et $R_1 = X^2$ puis $f_3(P_1) = 0 + X \times X^2 = X^3 = P_3$.
• $P_2(X^2) = X^4 = (X-1)(X^3 + X^2 + a) + X^2 - aX + a$ et donc $Q_2 = X - 1$ et $R_2 = X^2 - aX + a$ puis

$$f_3(P_2) = X - 1 + X(X^2 - aX + a) = X^3 - aX^2 + (a+1)X - 1 = -P_0 + (a+1)P_1 - aP_2 + P_3.$$

• $P_3(X^2) = X^6 = (X^3 - X^2 + X - a - 1)(X^3 + X^2 + 0X + a) + (2a+1)X^2 - aX + a^2 + a$ et donc $Q_3 = X^3 - X^2 + X - a - 1$ et $R_3 = (2a+1)X^2 - aX + a^2 + a$ puis

$$\begin{aligned} f_3(P_3) &= X^3 - X^2 + X - a - 1 + X((2a+1)X^2 - aX + a^2 + a) = (2a+2)X^3 - (a+1)X^2 + (a^2+a+1)X - a - 1 \\ &= -(a+1)P_0 + (1+a+a^2)P_1 - (a+1)P_2 + (2a+2)P_3. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.}$$

23. En développant successivement deux fois suivant la première colonne, on obtient

$$\det(f_3) = \det(B) = (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -a-1 \\ -a & -a-1 \end{vmatrix} = -(a+1-a^2-a) = a^2 - 1.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{C},\ \det(f_3) = a^2 - 1.}$$

24. Immédiatement

$$\boxed{f_3 \notin \mathscr{GL}(\mathbb{C}_3[X]) \Leftrightarrow a \in \{-1, 1\}.}$$

25. a) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$.

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -z \\ x+t \\ z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow y = z = 0 \text{ et } t = -x.$$

Donc $\text{Ker}(f_3) = \{xP_0 - xP_3,\ x \in \mathbb{C}\} = \{\lambda(X^3 - 1),\ \lambda \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(X^3 - 1)$.

$$\boxed{\text{Ker}(f_3) = \{\lambda(X^3 - 1),\ \lambda \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(X^3 - 1).}$$

b) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f_3)) = \dim(\mathbb{C}_3[X]) - \dim(\text{Ker}(f_3)) = 4 - 1 = 3$. De plus, la matrice B fournit $\text{Im}(f_3) = \text{Vect}(P_1, P_3, -P_0 + P_2 + P_3, P_1) = \text{Vect}(P_1, P_3, -P_0 + P_2 + P_3)$. Puisque la famille $(P_1, P_3, -P_0 + P_2 + P_3)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f_3)$ de cardinal 3, c'est une base de $\text{Im}(f_3)$.

$$\boxed{\text{Une base de Im}(f_3) \text{ est } (X, X^3, X^3 + X^2 - 1).}$$

c) Dans $\text{Ker}(f_3) + \text{Im}(f_3)$, on trouve X, X^3, $(X^3 + X^2 - 1) - (X^3 - 1) = X^2$ et $X^3 - (X^3 - 1) = 1$. Donc le sous-espace $\text{Ker}(f_3) + \text{Im}(f_3)$ contient la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$. On en déduit que $\text{Ker}(f_3) + \text{Im}(f_3) = \mathbb{C}_3[X]$. D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f_3)) + \dim(\text{Im}(f_3)) = \dim(\mathbb{C}_3[X])$.
En résumé, on a $\text{Ker}(f_3) + \text{Im}(f_3) = \mathbb{C}_3[X]$ et $\dim(\text{Ker}(f_3)) + \dim(\text{Im}(f_3)) = \dim(\mathbb{C}_3[X]) < +\infty$ et on sait que

$$\boxed{\mathbb{C}_3[X] = \text{Ker}(f_3) \oplus \text{Im}(f_3).}$$

IV Etude du noyau

26. Soit P un polynôme non nul de degré $p < \dfrac{n}{2}$. Alors le polynôme $P(X^2)$ est de degré $2p < n$ et donc le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T sont respectivement $Q = 0$ et $R = P(X^2)$. On en déduit que $f(P) = Q + XR = XP(X^2) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Si } P \neq 0 \text{ et } 2\text{deg}(P) < n,\ f(P) \neq 0.}$$

27. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. La division euclidienne de $P(X^2)$ par T s'écrit $P(X^2) = QT + R$ avec $\text{deg}(R) < n$. Dans ce cas, $f(P) = Q + XR$

• Si $f(P) = 0$, alors $Q = -XR$ et donc $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X) = R(X)(1 - XT(X))$. Par suite, il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$.
• Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$ et calculons $f(P)$. On a $P(X^2) = -XRT(X) + R(X)$ avec $\text{deg}(R) < \text{deg}(T)$. Par suite, $-XR$ et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T et on en déduit que $f(P) = -XR + XR = 0$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}([X]),\ f(P) = 0 \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]/\ P(X^2) = R(X)(1 - XT(X)).}$$

28. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si $P \in \text{Ker}(f)$, alors il existe $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(X^2) = R(1 - XT)$. Mais alors

$$2\text{deg}(P) = \text{deg}(R) + \text{deg}(1 - XT) = \text{deg}(R) + n + 1 \leqslant n - 1 + n + 1 = 2n,$$

et donc $\text{deg}(P) \leqslant n$.

$$\boxed{\text{Ker}(f) \subset \mathbb{C}_n[X].}$$

29. Si $P = 0$, le résultat est immédiat.
Soit P un élément non nul du noyau de f. Alors d'après la question précédente $\text{deg}(P) \leqslant n$ de plus, d'après la question 27., il existe $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(X^2) = R(1 - XT)$. Plus précisément, $2\text{deg}(P) = \text{deg}(R) + n + 1$ et donc $\text{deg}(R) = 2\text{deg}(P) - (n+1)$.
Soit $k \in [\![0, n - \text{deg}(P)]\!]$ alors $X^k P \in \mathbb{C}_n[X]$. Soit $p_k = X^k P$ et $R_k = X^{2k} R$. D'après ce qui précède,

$$P_k(X^2) = X^{2k} P(X^2) = X^{2k} R(1 - XT) = R_k(1 - XT).$$

De plus, $\deg(R_k) = 2k + \deg(R) = 2(k + \deg(P)) - (n+1) \leqslant 2n - (n+1) = n - 1$. Par suite, R_k est un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P_k = R_k(1 - XT)$ et d'après la question 27, le polynôme P_k est dans le noyau de f.

30. a) Par hypothèse le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul et donc I est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément que l'on note d.

b) Le polynôme $P_1 - \dfrac{\mathrm{dom}(P_1)}{\mathrm{dom}(P_0)} P_0$ est encore un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ car $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel, de degré inférieur ou égal à d. De plus le coefficient de X^d dans $P_1 - \dfrac{\mathrm{dom}(P_1)}{\mathrm{dom}(P_0)} P_0$ vaut $\mathrm{dom}(P_1) - \dfrac{\mathrm{dom}(P_1)}{\mathrm{dom}(P_0)} \mathrm{dom}(P_0) = 0$. Par suite, $P_1 - \dfrac{\mathrm{dom}(P_1)}{\mathrm{dom}(P_0)} P_0$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ de degré au plus $d - 1$. Ce polynôme est donc le polynôme nul par définition de d.

$$\boxed{P_1 = \frac{\mathrm{dom}(P_1)}{\mathrm{dom}(P_0)} P_0.}$$

c) • Puisque $P_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, d'après la question 29, pour tout $k \in [\![0, n-d]\!]$, $X^k P_0 \in \mathrm{Ker}(f)$. Puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel, $\mathrm{Ker}(f)$ contient encore les combinaisons linéaires des $X^k P_0$, $0 \leqslant k \leqslant n - d$, c'est-à-dire les SP_0, $S \in \mathbb{C}_{n-d}[X]$.
• Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. La division euclidienne de P par le polynôme non nul P_0 s'écrit $P = SP_0 + R$ avec $\deg(R) < d$. Mais alors, $P - SP_0 = R \in \mathrm{Ker}(f)$ et puisque $\deg(R) < d$, $P - SP_0 = 0$ ou encore $P = SP_0$.

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{SP_0,\ S \in \mathbb{C}_{n-d}[X]\}.}$$

31. D'après les questions 28 et 25.b), $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1)$.

V Etude d'un produit scalaire

32. On sait déjà que g est linéaire et que $g(\mathbb{C}_2[X]) \subset \mathbb{C}_2[X]$ d'après la question 19. De plus, l'image par g d'un polynôme à coeffcients réels est un polynôme à coefficients réels et donc $g(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$

$$\boxed{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X]).}$$

D'après les calculs de la question 20, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

33. $< .,. >$ est une application de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ dans $\mathbb{R}$, bilinéaire par bilinéarité de la multiplication et linéarité de la dérivation, symétrique.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $< P, P >= (P(1))^2 + (P'(1))^2 + (P''(1))^2 \geqslant 0$ et donc $< .,. >$ est positive. Enfin, si $< P, P >= 0$, alors $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. La formule de TAYLOR permet alors d'écrire

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 = 0,$$

et donc $P = 0$. Ainsi, $< .,. >$ est définie positive.

En résumé, $< .,. >$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathbb{R}_2[X]$ et donc

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].}$$

34. On a vu que $A^2 = I_3$ et puisque ${}^tA = A$, $A \times {}^tA = A^2 = I_3$. Donc $A \in O_3(\mathbb{R})$.

35. $< 1, 1 >= 1$ puis $g(1) = X$ et donc $< g(1), g(1) >= 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 \neq < 1, 1 >$. Donc g n'est pas une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $< .,. >$.