CONCOURS COMMUN 2009

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Problème I : Algèbre et géométrie

A. Etude de deux applications

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $P = aX^2 + bX + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(P) = \frac{1}{2}\left[\left(a\frac{X^2}{4} + b\frac{X}{2} + c\right) + \left(a\frac{(X+1)^2}{4} + b\frac{X+1}{2} + c\right)\right] = \frac{a}{4}X^2 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2}\right)X + \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + c,$$

et donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \lambda \times \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] + \mu \times \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

et donc, f est linéaire.

$$\boxed{f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right).}$$

2. Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).$$

et donc, φ est linéaire.

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}).}$$

3. Le calcul de la question 1. fournit en particulier $f(1) = 1$, $f(X) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{X}{2}$ et $f(X^2) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{X}{4} + \dfrac{X^2}{4}$. Par suite,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$$

4. La matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls. Par suite, cette matrice est inversible et on en déduit que

$$\boxed{f \in \mathscr{GL}(\mathbb{R}_2[X]).}$$

5. Soit $P = aX^2 + bX + c$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$. Donc

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{aX^2 + bX - a - b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^2-1) + b(X-1),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-1).$$

Ainsi, la famille $(X-1, X^2-1)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. De plus, les polynômes $X-1$ et X^2-1 n'ont pas le même degré et par suite, la famille $(X-1, X^2-1)$ est libre. Cette famille est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est } (X-1, X^2-1) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2.}$$

6. Puisque $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$, φ n'est pas injective.
$\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et donc soit $\{0\}$, soit $\mathbb{R}$. Le théorème du rang fournit

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$$

et donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. On en déduit que φ est surjective.

$$\boxed{\varphi \text{ est surjective et non injective.}}$$

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. Les trois polynômes 1, $-2X+1$ et $6X^2-6X+1$ sont trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés deux à deux distincts. La famille $\mathcal{B}'$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme de plus $\mathrm{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) < +\infty$, la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

8.

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

9. Q est inversible car Q est une matrice de passage d'une base à une autre. Son inverse Q^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
Posons $P_0 = 1$, $P_1 = 1 - 2X$ et $P_2 = 1 - 6X + 6X^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = 1 \\ P_1 = 1 - 2X \\ P_2 = 1 - 6X + 6X^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = P_0 \\ X = \dfrac{1}{2}(P_0 - P_1) \\ P_2 = P_0 - 3(P_0 - P_1) + 6X^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = P_0 \\ X = \dfrac{1}{2}(P_0 - P_1) \\ X^2 = \dfrac{1}{6}(2P_0 - 3P_1 + P_2) \end{array}\right.$$

$$\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}.}$$

10. D'après le calcul de la question 1., $f(P_0) = P_0$ puis $f(P_1) = -X - \dfrac{2}{4} + 1 = \dfrac{1}{2}(-2X+1) = \dfrac{1}{2}P_1$ et enfin

$$f(P_2) = \frac{6}{4}X^2 + \left(\frac{6}{4} - \frac{6}{2}\right)X + \frac{6}{8} - \frac{6}{4} + 1 = \frac{6}{4}X^2 - \frac{6}{4}X + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(6X^2 - 6X + 1) = \frac{1}{4}P_2.$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).}$$

11. Les formules de changement de bases fournissent $A = QMQ^{-1}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = Q\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n)Q^{-1} = QM^nQ^{-1} = Q\mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{4^n}\right)Q^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{4^n} \\ 0 & -\frac{2}{2^n} & -\frac{6}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{6}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{b+c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n} \\ \frac{b+c}{2^n} - \frac{c}{4^n} \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^n(P) = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{b+c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n}\right) + \left(\frac{b+c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right)X + \frac{c}{4^n}X^2.}$$

13. On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \lim_{n \to +\infty} \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{b+c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n}\right) + \left(\frac{b+c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n}$$
$$= a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \int_0^1 (a + bt + ct^2)\,dt = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,dt.}$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(P) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.

- Si $n = 0$, $\dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^0} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^0-1} P\left(\frac{X+k}{2^0}\right) = P = f^0(P)$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $f^n(P) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$. Alors

$$
\begin{aligned}
f^{n+1}(P) &= f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{(X+k)/2^n}{2}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+(X+k)/2^n}{2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).}$$

15. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. D'après la question précédente, $\varphi(f^n(P)) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, 2^n]\!]$, posons $x_k = \dfrac{k}{2^n}$. $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2^n}$ est une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ à pas constant égal à $\dfrac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas tend vers 0 et, puisque la fonction P est continue sur $[0,1]$, la somme de Riemann $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}(x_k - x_{k-1})P(x_k)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$ quand n tend vers $+\infty$. On retrouve donc le résultat de la question 13.

D. Etude d'une famille de sphères et d'une famille de droites

16. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z) \in S_m &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - m\sqrt{2})^2 = m^2 + 2.
\end{aligned}
$$

Puisque $m^2 + 2 > 0$, S_m est la sphère de centre $\Omega_m(0, 0, m\sqrt{2})$ et de rayon $R_m = \sqrt{m^2+2}$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R},\ S_m \text{ est la sphère de centre } \Omega_m(0,0,m\sqrt{2}) \text{ et de rayon } R_m = \sqrt{m^2+2}.}$$

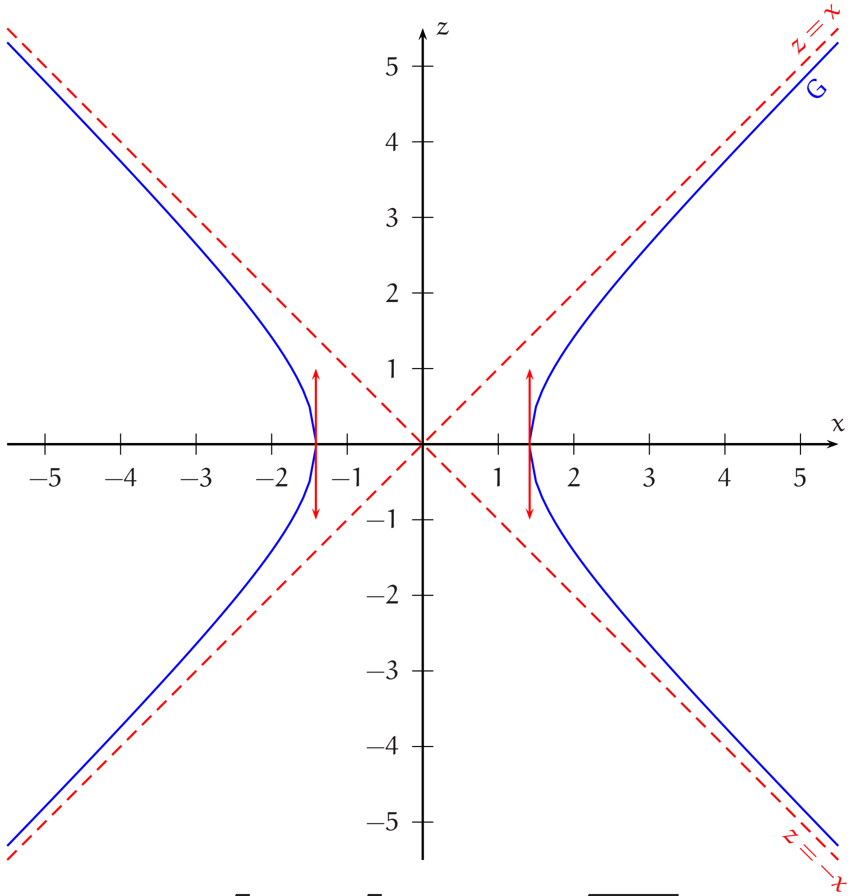
17. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = z^2 + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \end{array}\right. .$$

Ainsi, une équation de G dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ est $\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$. G est une hyperbole. Une équation de ses asymptotes est $\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 0$ ou encore $z = \pm x$.

$$\boxed{G \text{ est une hyperbole. Ses asymptotes sont les droites d'équations respectives } \left\{\begin{array}{l} z = x \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} z = -x \\ y = 0 \end{array}\right. .}$$

18.



19. Avec les notations usuelles, on a $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$. Par suite $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ et les foyers de G sont les points $F(2, 0)$ et $F'(-2, 0)$ dans (xOz) ou encore $F(2, 0, 0)$ et $F'(-2, 0, 0)$ dans $\mathcal{R}$. Ensuite, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

$$\boxed{G \text{ est une hyperbole de foyers } F(2, 0, 0)_{\mathcal{R}} \text{ et } F'(-2, 0, 0)_{\mathcal{R}} \text{ et d'excentricité } e = \sqrt{2}.}$$

20. Soit $m \in \mathbb{R}$. Un système d'équation paramétriques de (D_θ) est $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2}\sin\theta + \lambda\cos\theta \\ y = -\sqrt{2}\cos\theta + \lambda\sin\theta \\ z = \lambda \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Un repère de (D_θ) est donc $(A_\theta, \overrightarrow{u}_\theta)$ où $A_\theta(\sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta, 0)$ et $\overrightarrow{u}_\theta(\cos\theta, \sin\theta, 1)$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ (D_\theta) \text{ est la droite passant parle point } A_\theta(\sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta, 0) \text{ et de vecteur directeur } \overrightarrow{u}_\theta(\cos\theta, \sin\theta, 1).}$$

21. Soit $(m, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Calculons la distance de la droite (D_θ) au centre Ω_m de la sphère S_m. On sait que

$$d(\Omega_m, (D_\theta)) = \frac{\|\overrightarrow{A_\theta\Omega_m} \wedge \overrightarrow{u}_\theta\|}{\|\overrightarrow{u}_\theta\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\overrightarrow{A_\theta\Omega_m} \wedge \overrightarrow{u}_\theta\|.$$

Ensuite, $\overrightarrow{A_\theta\Omega_m} \wedge \overrightarrow{u}_\theta = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta \\ m\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\theta - m\sin\theta \\ \sin\theta - m\cos\theta \\ -1 \end{pmatrix}$ puis

$$\|\overrightarrow{A_\theta\Omega_m} \wedge \overrightarrow{u}_\theta\| = \sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta - m\sin\theta)^2 + (\sin\theta - m\cos\theta)^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{1 + m^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 2},$$

et donc

$$d(\Omega_m, (D_\theta)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 2} = \sqrt{m^2 + 2} = R_m.$$

Puisque $d(\Omega_m, (D_\theta)) = R_m$, on sait que la droite (D_θ) est tangente à la sphère S_m.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{R},\ \text{la droite } (D_\theta) \text{ est tangente à la sphère } S_m.}$$

22. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $M(\sqrt{2}\sin\theta + \lambda\cos\theta, -\sqrt{2}\cos\theta + \lambda\sin\theta, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D_θ).

$$x_M^2 + y_M^2 - z_M^2 - 2 = (\sqrt{2}\sin\theta + \lambda\cos\theta)^2 + (-\sqrt{2}\cos\theta + \lambda\sin\theta)^2 - (\lambda)^2 - 2 = 2 + \lambda^2 - \lambda^2 - 2 = 0.$$

Donc tout point M de (D_θ) appartient à $\mathcal{E}$ et finalement (D_θ) est contenue dans $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ (D_\theta) \subset \mathcal{E}.}$$

23. Réciproquement, soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$. On a donc $x^2 + y^2 = z^2 + 2$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) dans un certain repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ a donc même norme que le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(z, -\sqrt{2})$. Par suite, il existe un réel θ tel que $\overrightarrow{u} = r_\theta(\overrightarrow{v})$ ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ z\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour ce réel θ, le point M appartient à la droite (D_θ).

24. En résumé, la surface $\mathcal{E}$ est la réunion des droites (D_θ), $\theta \in \mathbb{R}$.

Problème II : Analyse

A. Étude d'une fonction

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = (-x)\,\mathrm{sh}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

$$\boxed{\text{f est paire.}}$$

2. (a) On sait que $\mathrm{sh}\,x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim x \times \dfrac{1}{x} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.}$$

(b) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et donc $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{1}{2}e^{1/x}$. Mais alors, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} x e^{1/x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{e^X}{X} = +\infty.$$

f étant paire, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.}$$

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $y \mapsto \mathrm{sh}\,y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right),$$

(car la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

4. Soit $X > 0$. La fonction th est continue sur $[0, X]$ et dérivable sur $]0, X[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, X[$ tel que

$$\frac{\mathrm{th}\,X}{X} = \frac{\mathrm{th}\,X - \mathrm{th}\,0}{X - 0} = \mathrm{th}'(c) = 1 - \mathrm{th}^2(c) < 1 \text{ car } c > 0,$$

et on en déduit $\mathrm{th}\,X < X$.

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{th}\,X < X.}$$

5. Soit $x > 0$. D'après la question précédente $\mathrm{th}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} < 0$. Comme de plus $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f' est donc strictement négative sur $]0, +\infty[$ et la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. f étant paire, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
f	1 ↗		$+\infty$ || $+\infty$		↘ 1

6. Quand X tend vers 0

$$\frac{\operatorname{sh} X}{X} = \frac{1}{X}\left(X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5)\right) = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).$$

7. Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0. D'après la question précédente, on a donc

$$\boxed{\text{Quand tend vers } +\infty \text{ ou } -\infty,\ f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

8. Notons F la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. F est déjà dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'après la question précédente, quand x tend vers 0, $F(x) = 1 + o(x) = 1 + 0x + o(x)$. Donc F se prolonge par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$, puis en notant encore F le prolongement, F admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 (avec $F'(0) = 0$). F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

B. Tracé d'une courbe paramétrée

9. • x est la fonction f et son étude a été effectuée en A.

• La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$y'(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{1/t} = \frac{t-1}{t}e^{1/t}.$$

La fonction y est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$.

• Quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\dfrac{1}{t}$ tend vers 0 et donc $e^{1/t}$ tend vers 1 puis $y(t) \sim t$. Par suite, $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

• Quand t tend vers 0 par valeurs inférieures, $\dfrac{1}{t}$ tend vers $-\infty$, puis $e^{1/t}$ tend vers 0 et donc $y(t)$ tend vers 0. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{1}{t}$ tend vers $+\infty$ puis $y(t)$ tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

• **Tableau de variations conjointes des fonctions x et y.**

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$-$		$-$	
x	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\operatorname{sh} 1$	$\searrow$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

10. • Quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, Γ admet la droite d'équation $x = 1$ pour droite asymptote.

• Quand t tend vers 0 par valeurs inférieures, Γ admet la droite d'équation $y = 0$ pour droite asymptote.

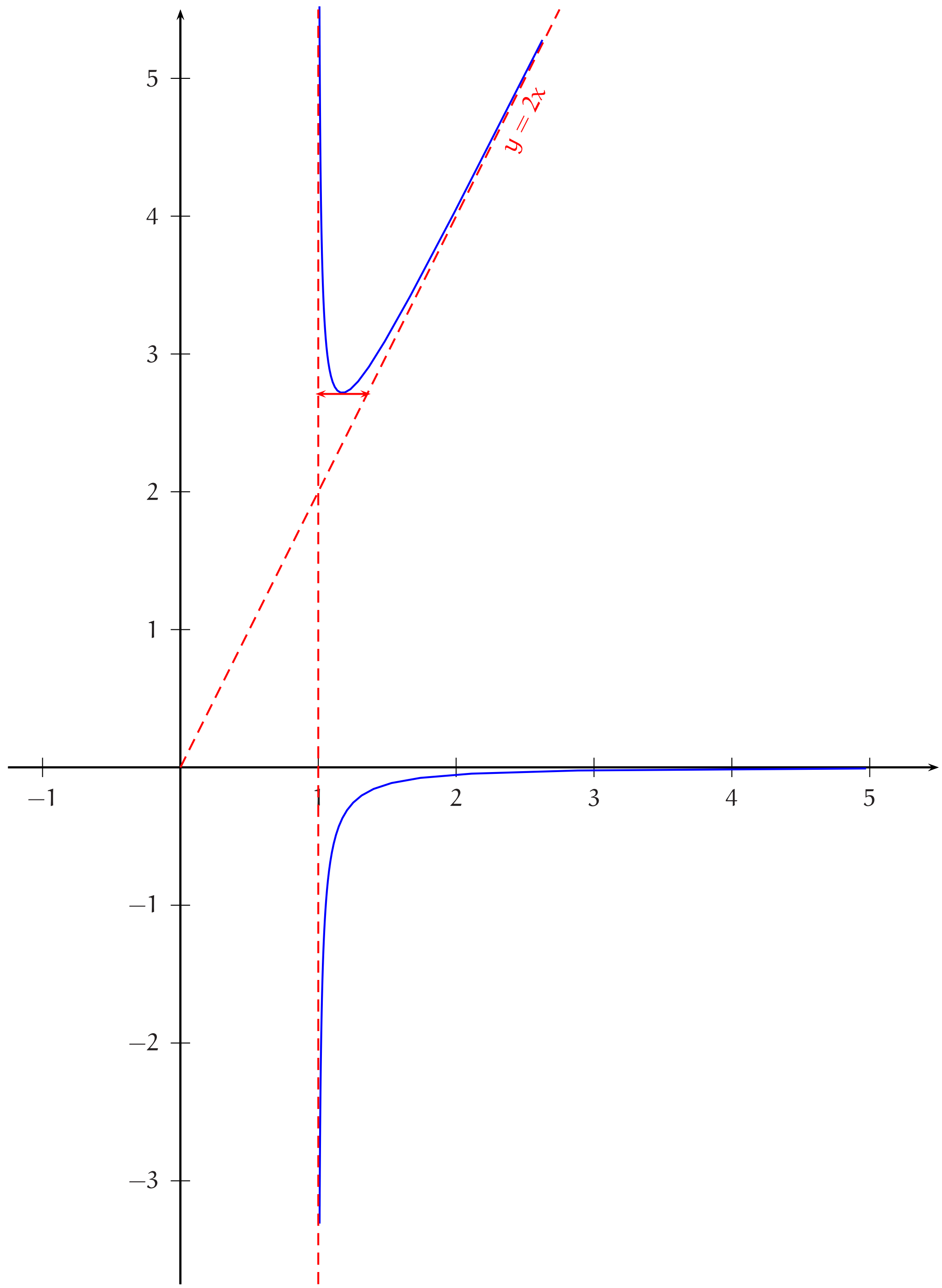
• Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$. Ensuite, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{e^{1/t}}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{t}\right)} \sim \dfrac{e^{1/t}}{e^{1/t}/2} = 2$ puis

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t}{2}(e^{1/t} - e^{1/t} + e^{-1/t}) = \frac{te^{-1/t}}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et donc la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à Γ quand t tend vers 0. De plus, $y(t) - 2x(t)$ est strictement négatif sur $]-\infty, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$. On en déduit que Γ est strictement au-dessous de (D) quand t décrit $]-\infty, 0[$ et strictement au-dessus quand t décrit $]0, +\infty[$.

11. On a $y'(1) = 0$ et $x'(1) \neq 0$. Par suite la tangente à Γ au point de paramètre $t = 1$ est parallèle à la droite (Ox).

Tracé.



C. Une équation différentielle

12. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{ch} x}{x}$. Comme les deux fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ xf'(x) + f(x) = \operatorname{ch}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (xf)'(x) = \operatorname{ch}(x) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ xf(x) = \operatorname{sh}(x) + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ f(x) = \frac{\operatorname{sh}(x) + C}{x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{\text{sh}(x) + C}{x},\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

13. Les calculs précédents restent valables à l'identique sur $]-\infty, 0[$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{\text{sh}(x) + C}{x},\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

14. Soit f une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sh}(x) + C_1}{x} \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{\text{sh}(x) + C_2}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Réciproquement, soit f une telle fonction. f est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$ et, si f est dérivable en 0, f vérifie encore l'égalité (E) pour $x = 0$. En résumé, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en 0.
Mais si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, f n'a pas de limite réelle en 0 et n'est donc pas solution. Il ne reste que le cas où $C_1 = C_2 = 0$ qui fournit la fonction F de la question 8. Comme F est dérivable en 0, F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{F\} \text{ où } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

D. Etude d'une suite

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)[=]1, +\infty[$. Comme $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$, le réel $\dfrac{n+1}{n}$ admet un antécédent et un seul par f dans $]0, +\infty[$ ou encore $\exists! u_n \in]0, +\infty[/\ f(u_n) = \dfrac{n+1}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! u_n \in]0, +\infty[/\ f(u_n) = \frac{n+1}{n}.}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n = f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. Mais la fonction f^{-1} a le même sens de variation sur $]1, +\infty[$ que la fonction f sur $]0, +\infty[$. La fonction f^{-1} est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. On en déduit que la suite (u_n) a un sens de variation contraire au sens de variation de la suite $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. Or

$$\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

On en déduit que la suite $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

17. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite dans $]-\infty, +\infty]$. De plus,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{x \to 1^+} f^{-1}(x) = +\infty \text{ (car } \lim_{y \to +\infty} f(y) = 1).$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

18. D'après la question 7., puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$,

$$1 + \frac{1}{n} = f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right),$$

et donc $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{6u_n^2} + o\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right)$ ou encore $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6u_n^2}$. On en déduit que $6u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puis $u_n = \sqrt{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{6}}$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}.}$$

C. Une fonction définie par une intégrale

19. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \mathrm{sh}(2x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x).}$$

20. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit g une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $J(x) = g(x) - g\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Par suite, J est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$

$$\begin{aligned} J'(x) &= f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \times x\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - \frac{1}{2}f(x)\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\boxed{J \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].}$$

21. La fonction f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or, pour $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \mathrm{argch}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \ln(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}.$$

(On sait que pour tout $x \geqslant 1$, $\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Redémontrons le.
Pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $e^X = \mathrm{ch}(X) + \mathrm{sh}(X)$ puis pour $X \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(X) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(X) - 1}$. En appliquant à $X = \mathrm{argch}(x)$, on obtient $e^{\mathrm{argch}(x)} = \mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x)) + \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = x + \sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{argch}(x)) - 1} = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et donc $\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.)

22. On en déduit le tableau de variations de la fonction J.

x	0		$\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$		$+\infty$
$J'(x)$		$-$	0	$+$	
J	$+\infty$	$\searrow$	$J\left(\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

23. Graphe de J.