

CONCOURS COMMUN 2009

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Problème I : Algèbre et géométrie

A. Etude de deux applications

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $P = aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(P) = \frac{1}{2} \left[\left(a \frac{X^2}{4} + b \frac{X}{2} + c \right) + \left(a \frac{(X+1)^2}{4} + b \frac{X+1}{2} + c \right) \right] = \frac{a}{4} X^2 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} \right) X + \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + c,$$

et donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2} \left[(\lambda P + \mu Q) \left(\frac{X}{2} \right) + (\lambda P + \mu Q) \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= \lambda \times \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] + \mu \times \frac{1}{2} \left[Q \left(\frac{X}{2} \right) + Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] = \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

et donc, f est linéaire.

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]).$$

2. Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q).$$

et donc, φ est linéaire.

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}).$$

3. Le calcul de la question 1. fournit en particulier $f(1) = 1$, $f(X) = \frac{1}{4} + \frac{X}{2}$ et $f(X^2) = \frac{1}{8} + \frac{X}{4} + \frac{X^2}{4}$. Par suite,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. La matrice de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls. Par suite, cette matrice est inversible et on en déduit que

$$f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}_2[X]).$$

5. Soit $P = aX^2 + bX + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. $P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$. Donc

$$\text{Ker}(\varphi) = \{aX^2 + bX - a - b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^2 - 1) + b(X - 1), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1).$$

Ainsi, la famille $(X-1, X^2-1)$ est génératrice de $\text{Ker}(\varphi)$. De plus, les polynômes $X-1$ et X^2-1 n'ont pas le même degré et par suite, la famille $(X-1, X^2-1)$ est libre. Cette famille est donc une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

Une base de $\text{Ker}(\varphi)$ est $(X-1, X^2-1)$ et $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$.

6. Puisque $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$, φ n'est pas injective.

$\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} et donc soit $\{0\}$, soit \mathbb{R} . Le théorème du rang fournit

$$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$$

et donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. On en déduit que φ est surjective.

φ est surjective et non injective.

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. Les trois polynômes $1, -2X+1$ et $6X^2-6X+1$ sont trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés deux à deux distincts. La famille \mathcal{B}' est donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme de plus $\text{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) < +\infty$, la famille \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

\mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Q est inversible car Q est une matrice de passage d'une base à une autre. Son inverse Q^{-1} est la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} .

Posons $P_0 = 1, P_1 = 1 - 2X$ et $P_2 = 1 - 6X + 6X^2$.

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 1 - 2X \\ P_2 = 1 - 6X + 6X^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = P_0 \\ X = \frac{1}{2}(P_0 - P_1) \\ P_2 = P_0 - 3(P_0 - P_1) + 6X^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = P_0 \\ X = \frac{1}{2}(P_0 - P_1) \\ X^2 = \frac{1}{6}(2P_0 - 3P_1 + P_2) \end{cases}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

10. D'après le calcul de la question 1., $f(P_0) = P_0$ puis $f(P_1) = -X - \frac{2}{4} + 1 = \frac{1}{2}(-2X + 1) = \frac{1}{2}P_1$ et enfin

$$f(P_2) = \frac{6}{4}X^2 + \left(\frac{6}{4} - \frac{6}{2}\right)X + \frac{6}{8} - \frac{6}{4} + 1 = \frac{6}{4}X^2 - \frac{6}{4}X + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(6X^2 - 6X + 1) = \frac{1}{4}P_2.$$

Donc,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

11. Les formules de changement de bases fournissent $A = QMQ^{-1}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = Q \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) Q^{-1} = Q M^n Q^{-1} = Q \text{diag} \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{4^n} \right) Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{4^n} \\ 0 & -\frac{2}{2^n} & -\frac{6}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{6}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{b+c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n} \\ \frac{b+c}{2^n} - \frac{c}{4^n} \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}, f^n(P) = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{b+c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n} \right) + \left(\frac{b+c}{2^n} - \frac{c}{4^n} \right) X + \frac{c}{4^n} X^2.$$

13. On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{b+c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n} \right) + \left(\frac{b+c}{2^n} - \frac{c}{4^n} \right) + \frac{c}{4^n} \\ &= a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = \int_0^1 P(t) dt. \end{aligned}$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.

• Si $n = 0$, $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^{2^0-1} P\left(\frac{X+k}{2^0}\right) = P = f^0(P)$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(P) &= f\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{(X+k)/2^n}{2}\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+(X+k)/2^n}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \right] = \frac{1}{2^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \right].
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. D'après la question précédente, $\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$, posons $x_k = \frac{k}{2^n}$. $(x_k)_{0 \leq k \leq 2^n}$ est une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ à pas constant égal à $\frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas tend vers 0 et, puisque la fonction P est continue sur $[0, 1]$, la somme de RIEMANN $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{2^n} (x_k - x_{k-1})P(x_k)$ tend vers $\int_0^1 P(t) dt$ quand n tend vers $+\infty$. On retrouve donc le résultat de la question 13.

D. Etude d'une famille de sphères et d'une famille de droites

16. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
M(x, y, z) \in S_m &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - m\sqrt{2})^2 = m^2 + 2.
\end{aligned}$$

Puisque $m^2 + 2 > 0$, S_m est la sphère de centre $\Omega_m(0, 0, m\sqrt{2})$ et de rayon $R_m = \sqrt{m^2 + 2}$.

$$\forall m \in \mathbb{R}, S_m \text{ est la sphère de centre } \Omega_m(0, 0, m\sqrt{2}) \text{ et de rayon } R_m = \sqrt{m^2 + 2}.$$

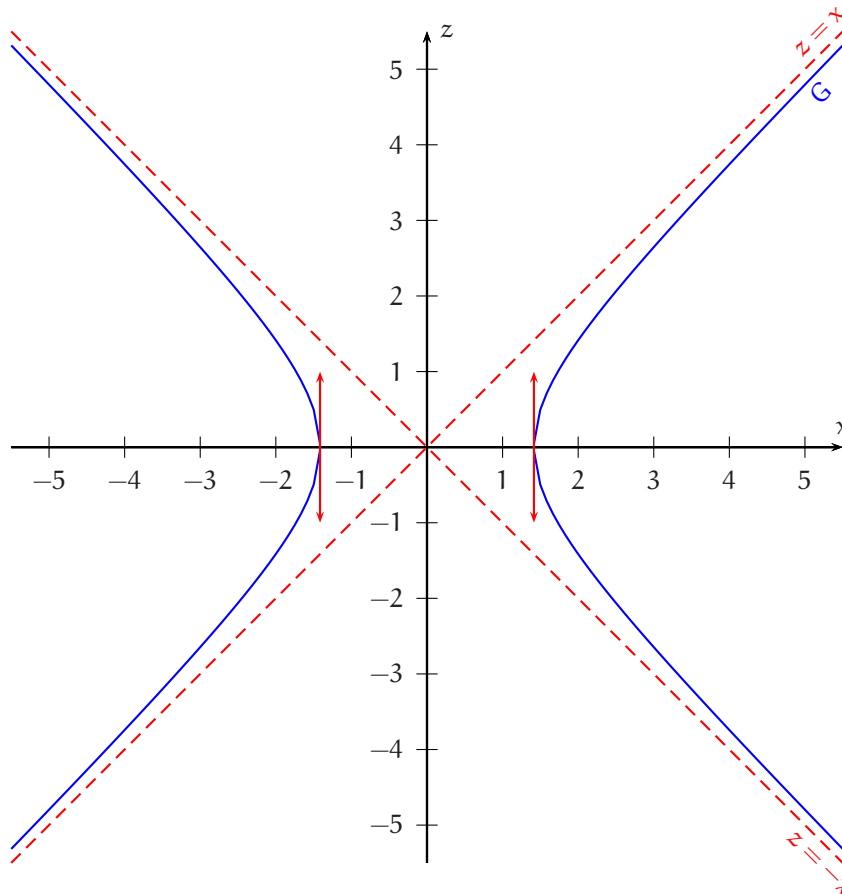
17. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = z^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, une équation de G dans le repère (O, \vec{i}, \vec{k}) est $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$. G est une hyperbole. Une équation de ses asymptotes est $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 0$ ou encore $z = \pm x$.

$$G \text{ est une hyperbole. Ses asymptotes sont les droites d'équations respectives } \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}.$$

18.



19. Avec les notations usuelles, on a $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$. Par suite $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ et les foyers de G sont les points $F(2, 0)$ et $F'(-2, 0)$ dans (xOz) ou encore $F(2, 0, 0)$ et $F'(-2, 0, 0)$ dans \mathcal{R} . Ensuite, $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

G est une hyperbole de foyers $F(2, 0, 0)_{\mathcal{R}}$ et $F'(-2, 0, 0)_{\mathcal{R}}$ et d'excentricité $e = \sqrt{2}$.

20. Soit $m \in \mathbb{R}$. Un système d'équation paramétriques de (D_{θ}) est $\begin{cases} x = \sqrt{2} \sin \theta + \lambda \cos \theta \\ y = -\sqrt{2} \cos \theta + \lambda \sin \theta \\ z = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Un repère de (D_{θ}) est donc $(A_{\theta}, \vec{u}_{\theta})$ où $A_{\theta}(\sqrt{2} \sin \theta, -\sqrt{2} \cos \theta, 0)$ et $\vec{u}_{\theta}(\cos \theta, \sin \theta, 1)$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, (D_{θ}) est la droite passant par le point $A_{\theta}(\sqrt{2} \sin \theta, -\sqrt{2} \cos \theta, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_{\theta}(\cos \theta, \sin \theta, 1)$.

21. Soit $(m, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Calculons la distance de la droite (D_{θ}) au centre Ω_m de la sphère S_m . On sait que

$$d(\Omega_m, (D_{\theta})) = \frac{\|\overrightarrow{A_{\theta}\Omega_m} \wedge \vec{u}_{\theta}\|}{\|\vec{u}_{\theta}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\overrightarrow{A_{\theta}\Omega_m} \wedge \vec{u}_{\theta}\|.$$

Ensuite, $\overrightarrow{A_{\theta}\Omega_m} \wedge \vec{u}_{\theta} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta \\ m\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \theta - m \sin \theta \\ \sin \theta - m \cos \theta \\ -1 \end{pmatrix}$ puis

$$\|\overrightarrow{A_{\theta}\Omega_m} \wedge \vec{u}_{\theta}\| = \sqrt{2} \sqrt{(\cos \theta - m \sin \theta)^2 + (\sin \theta - m \cos \theta)^2 + 1} = \sqrt{2} \sqrt{1 + m^2 + 1} = \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 2},$$

et donc

$$d(\Omega_m, (D_{\theta})) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 2} = \sqrt{m^2 + 2} = R_m.$$

Puisque $d(\Omega_m, (D_{\theta})) = R_m$, on sait que la droite (D_{θ}) est tangente à la sphère S_m .

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{R}$, la droite (D_{θ}) est tangente à la sphère S_m .

22. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $M(\sqrt{2}\sin\theta + \lambda\cos\theta, -\sqrt{2}\cos\theta + \lambda\sin\theta, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D_θ) .

$$x_M^2 + y_M^2 - z_M^2 - 2 = (\sqrt{2}\sin\theta + \lambda\cos\theta)^2 + (-\sqrt{2}\cos\theta + \lambda\sin\theta)^2 - (\lambda)^2 - 2 = 2 + \lambda^2 - \lambda^2 - 2 = 0.$$

Donc tout point M de (D_θ) appartient à \mathcal{E} et finalement (D_θ) est contenue dans \mathcal{E} .

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, (D_\theta) \subset \mathcal{E}.}$$

23. Réciproquement, soit $M(x, y, z)$ un point de \mathcal{E} . On a donc $x^2 + y^2 = z^2 + 2$. Le vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y) dans un certain repère orthonormé de \mathbb{R}^2 a donc même norme que le vecteur \vec{v} de coordonnées $(z, -\sqrt{2})$. Par suite, il existe un réel θ tel que $\vec{u} = r_\theta(\vec{v})$ ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ z\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour ce réel θ , le point M appartient à la droite (D_θ) .

24. En résumé, la surface \mathcal{E} est la réunion des droites (D_θ) , $\theta \in \mathbb{R}$.

Problème II : Analyse

A. Étude d'une fonction

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = (-x) \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{x} \right) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) = f(x)$.

f est paire.

2. (a) On sait que $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et donc quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) \sim x \times \frac{1}{x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

(b) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et donc $\operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{2} e^{1/x}$. Mais alors, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

f étant paire, on a aussi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et finalement

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R} et la fonction $y \mapsto \operatorname{sh} y$ est dérivable sur \mathbb{R} . Donc la fonction $x \mapsto \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* . On en déduit que f est dérivable sur \mathbb{R}^* en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* . De plus, pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) = \left[\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right] \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right),$$

(car la fonction ch ne s'annule pas sur \mathbb{R}).

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \left[\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right] \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right).$$

4. Soit $X > 0$. La fonction th est continue sur $[0, X]$ et dérivable sur $]0, X[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, X[$ tel que

$$\frac{\operatorname{th} X}{X} = \frac{\operatorname{th} X - \operatorname{th} 0}{X - 0} = \operatorname{th}'(c) = 1 - \operatorname{th}^2(c) < 1 \text{ car } c > 0,$$

et on en déduit $\operatorname{th} X < X$.

$$\forall X \in \mathbb{R}_+, \operatorname{th} X < X.$$

5. Soit $x > 0$. D'après la question précédente $\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} < 0$. Comme de plus $\operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) > 0$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f' est donc strictement négative sur $]0, +\infty[$ et la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. f étant paire, f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
f	1	$+\infty$	1

6. Quand X tend vers 0

$$\frac{\operatorname{sh} X}{X} = \frac{1}{X} \left(X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5) \right) = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).$$

7. Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $X = \frac{1}{x}$ tend vers 0. D'après la question précédente, on a donc

$$\text{Quand } x \text{ tend vers } +\infty \text{ ou } -\infty, f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

8. Notons F la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. F est déjà dérivable sur \mathbb{R}^* . D'après la question précédente, quand x tend vers 0, $F(x) = 1 + o(x) = 1 + 0x + o(x)$. Donc F se prolonge par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$, puis en notant encore F le prolongement, F admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 (avec $F'(0) = 0$). F est donc dérivable sur \mathbb{R} .

B. Tracé d'une courbe paramétrée

9. • x est la fonction f et son étude a été effectuée en A.

• La fonction y est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$y'(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{1/t} = \frac{t-1}{t} e^{1/t}.$$

La fonction y est donc strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$.

• Quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\frac{1}{t}$ tend vers 0 et donc $e^{1/t}$ tend vers 1 puis $y(t) \sim t$. Par suite, $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$.

• Quand t tend vers 0 par valeurs inférieures, $\frac{1}{t}$ tend vers $-\infty$, puis $e^{1/t}$ tend vers 0 et donc $y(t)$ tend vers 0. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $\frac{1}{t}$ tend vers $+\infty$ puis $y(t)$ tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

• **Tableau de variations conjointes des fonctions x et y .**

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	+		-	-
x	$1 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 1$	1
y	$-\infty \nearrow 0$		$+\infty \searrow e$	$+\infty$
$y'(t)$	+		-	+

10. • Quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, Γ admet la droite d'équation $x = 1$ pour droite asymptote.

• Quand t tend vers 0 par valeurs inférieures, Γ admet la droite d'équation $y = 0$ pour droite asymptote.

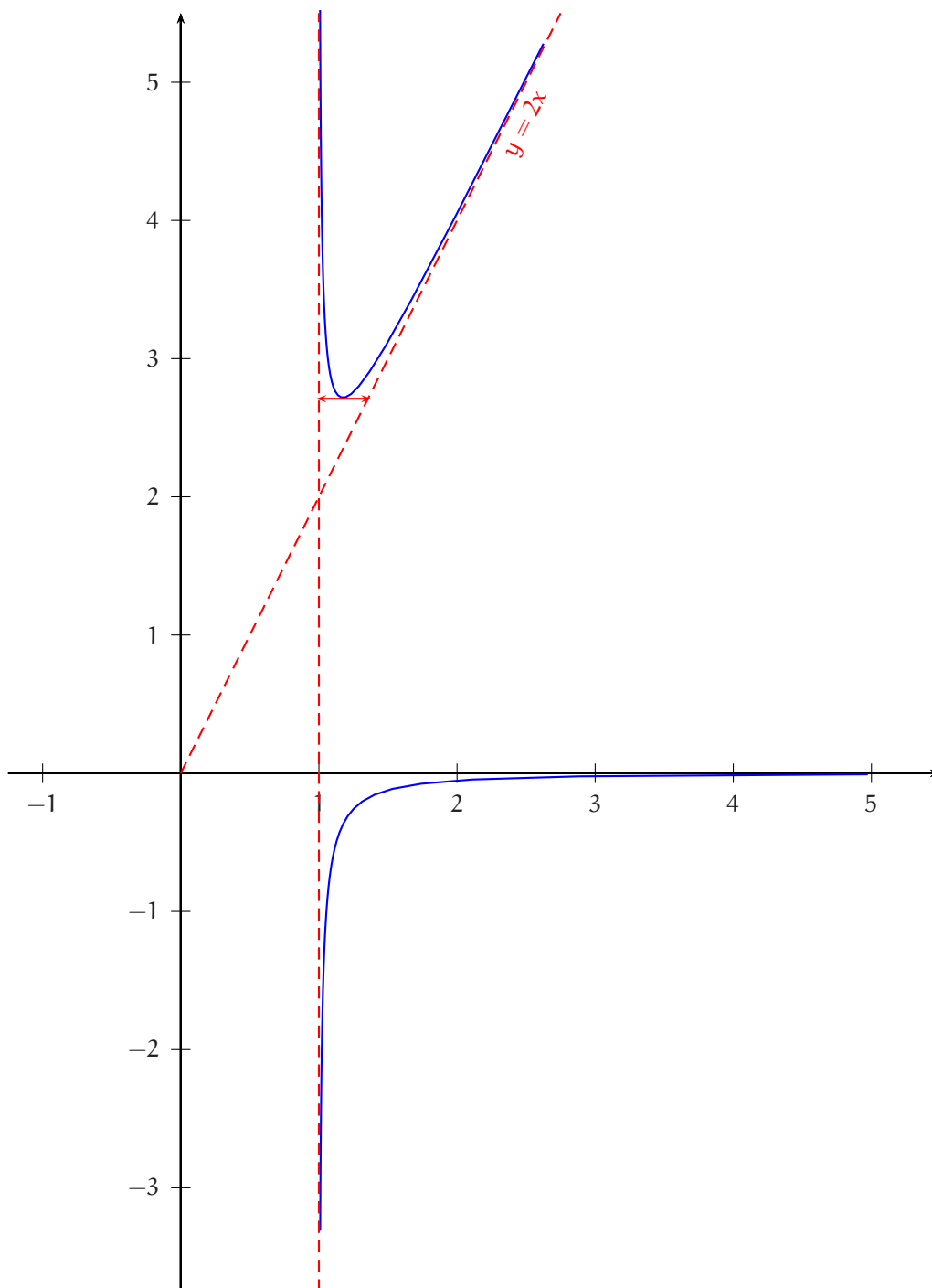
• Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$. Ensuite, $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^{1/t}}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{t}\right)} \sim \frac{e^{1/t}}{e^{1/t}/2} = 2$ puis

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t}{2}(e^{1/t} - e^{1/t} + e^{-1/t}) = \frac{te^{-1/t}}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et donc la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à Γ quand t tend vers 0. De plus, $y(t) - 2x(t)$ est strictement négatif sur $] -\infty, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$. On en déduit que Γ est strictement au-dessous de (D) quand t décrit $] -\infty, 0[$ et strictement au-dessus quand t décrit $]0, +\infty[$.

11. On a $y'(1) = 0$ et $x'(1) \neq 0$. Par suite la tangente à Γ au point de paramètre $t = 1$ est parallèle à la droite (Ox) .

Tracé.



C. Une équation différentielle

12. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$. Comme les deux fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{\text{ch } x}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 f \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad xf'(x) + f(x) = \text{ch}(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad (xf)'(x) = \text{ch}(x) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x > 0, \quad xf(x) = \text{sh}(x) + C \\
 &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\text{sh}(x) + C}{x}.
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ x \mapsto \frac{\text{sh}(x) + C}{x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

13. Les calculs précédents restent valables à l'identique sur $] -\infty, 0[$ et donc

$$\mathcal{S}_{]-\infty,0[} = \left\{ x \mapsto \frac{\text{sh}(x) + C}{x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. Soit f une éventuelle solution sur \mathbb{R} . Nécessairement, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(x) + C_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{sh}(x) + C_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Réciproquement, soit f une telle fonction. f est solution de (E) sur $] -\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$ et, si f est dérivable en 0, f vérifie encore l'égalité (E) pour $x = 0$. En résumé, f est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si f est dérivable en 0.

Mais si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, f n'a pas de limite réelle en 0 et n'est donc pas solution. Il ne reste que le cas où $C_1 = C_2 = 0$ qui fournit la fonction F de la question 8. Comme F est dérivable en 0, F est solution de (E) sur \mathbb{R} .

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{F\} \text{ où } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

D. Etude d'une suite

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[=]1, +\infty[$. Comme $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$, le réel $\frac{n+1}{n}$ admet un antécédent et un seul par f dans $]0, +\infty[$ ou encore $\exists! u_n \in]0, +\infty[/ f(u_n) = \frac{n+1}{n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! u_n \in]0, +\infty[/ f(u_n) = \frac{n+1}{n}.$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Mais la fonction f^{-1} a le même sens de variation sur $]1, +\infty[$ que la fonction f sur $]0, +\infty[$. La fonction f^{-1} est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. On en déduit que la suite (u_n) a un sens de variation contraire au sens de variation de la suite $\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Or

$$\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

On en déduit que la suite $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et donc que

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}$$

17. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite dans $] -\infty, +\infty]$. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) = +\infty \text{ (car } \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

18. D'après la question 7., puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,

$$1 + \frac{1}{n} = f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right),$$

et donc $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$ ou encore $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2}$. On en déduit que $6u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ puis $u_n = \sqrt{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}$.

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}$$

C. Une fonction définie par une intégrale

19. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x) = 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) = \operatorname{sh}(2x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x).$$

20. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit g une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $J(x) = g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right)$. Par suite, J est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$

$$\begin{aligned} J'(x) &= f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \times x \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - \frac{1}{2} f(x) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$J \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0, J'(x) = f(x) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

21. La fonction f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, pour $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \operatorname{argch}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \ln(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}.$$

(On sait que pour tout $x \geq 1$, $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Redémontrons le.

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $e^X = \operatorname{ch}(X) + \operatorname{sh}(X)$ puis pour $X \geq 0$, $\operatorname{sh}(X) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(X) - 1}$. En appliquant à $X = \operatorname{argch}(x)$, on obtient $e^{\operatorname{argch}(x)} = \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) + \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = x + \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(x)) - 1} = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et donc $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.)

22. On en déduit le tableau de variations de la fonction J .

x	0	$\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$	$+\infty$
$J'(x)$	-	0	+
J	$+\infty$	$J\left(\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right)$	$+\infty$

23. Graphe de J .

